

Charaktertafeln parabolischer Untergruppen der Steinbergschen Trialitätsgruppen und Anwendungen auf deren Darstellungstheorie

Von der Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
der Rheinisch-Westfälischen Technischen Hochschule Aachen
zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften genehmigte Dissertation

vorgelegt von

Diplom-Mathematiker

Frank Himstedt

aus Heinsberg

Berichter: Universitätsprofessor Dr. Gerhard Hiß
Universitätsprofessor Dr. Herbert Pahlings

Tag der mündlichen Prüfung: 13. Februar 2003

Diese Dissertation ist auf den Internetseiten der Hochschulbibliothek
online verfügbar.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	5
1 Rechnen in Gruppen vom Lie-Typ	13
1.1 Reduktive algebraische Gruppen und Wurzeldata	14
1.2 Wurzelsysteme und Weylgruppen	16
1.3 Kommutatorrelationen	17
1.4 Die Koeffizienten $c_{r,s;i,j}$ für halbeinfache Gruppen von adjungiertem Typ . .	19
1.5 Die Koeffizienten $c_{r,s;i,j}$ im allgemeinen Fall	22
1.6 Ein Algorithmus zum Rechnen in $\mathbf{U}$	24
1.7 Eine Präsentation	27
1.8 Die Bruhat-Zerlegung	29
1.9 Ein Algorithmus zum Rechnen in reduktiven Gruppen	30
2 Die Steinbergschen Trialitätsgruppen	39
2.1 Das Wurzelsystem vom Typ D_4	40
2.2 Die Steinbergschen Trialitätsgruppen	42
2.3 Relationen in ${}^3D_4(q)$	45
3 Konjugiertenklassen parabolischer Untergruppen	51
3.1 Konjugiertenklassen von ${}^3D_4(q)$	52
3.2 Konjugiertenklassen einer Boreluntergruppe	59
3.3 Konjugiertenklassen einer Levi-Untergruppe	63
3.4 Konjugiertenklassen einer weiteren Levi-Untergruppe	66

3.5	Konjugiertenklassen einer maximalen parabolischen Untergruppe	68
3.6	Konjugiertenklassen einer weiteren maximalen parabolischen Untergruppe .	83
3.7	Konjugiertenklassen eines Zentralisators	85
4	Charaktere parabolischer Untergruppen von ${}^3D_4(q)$	87
4.1	Charaktertheoretische Hilfsmittel	89
4.2	Die unipotenten Charaktere von ${}^3D_4(q)$	92
4.3	Die Charaktertafel von L_P	93
4.4	Die Charaktertafel von L_Q	99
4.5	Charaktere der Boreluntergruppe B	100
4.6	Die Charaktertafel eines unipotenten Radikals	108
4.7	Charaktere eines weiteren unipotenten Radikals	110
4.8	Trägheitsgruppen in P	111
4.9	Trägheitsgruppen in Q	117
4.10	Die Charaktertafel von P	118
4.11	Irreduzible Charaktere von Q	130
4.12	Charaktere eines Zentralisators	133
5	Modulare Darstellungstheorie parabolischer Untergruppen	135
5.1	Hilfsmittel aus der modularen Darstellungstheorie	137
5.2	Blöcke der parabolischen Untergruppe P	147
5.3	Hauptblock der parabolischen Untergruppe Q	151
5.4	Blöcke eines Zentralisators	152
6	Zerlegungszahlen der Trialitätsgruppen	155
6.1	Bezeichnungen	156
6.2	Zerlegungszahlen der Trialitätsgruppen	156
6.3	Beweis von Satz 6.2.4	159
6.4	Beweis von Satz 6.2.5	161
A	Tabellen	173
A.1	Strukturkonstanten	173

A.2	Operation von $\mathbf{W}$ auf $\mathbf{T}$	174
A.3	F -Konjugiertenklassen von $\mathbf{W}$	175
A.4	Maximale Tori von ${}^3D_4(q)$, q ungerade	176
A.5	Halbeinfache Klassen von ${}^3D_4(q)$, q ungerade	176
A.6	Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von ${}^3D_4(q)$, q ungerade	178
A.7	Die Konjugiertenklassen von ${}^3D_4(q)$, q ungerade	180
A.8	Halbeinfache Klassen von B	182
A.9	Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von B	183
A.10	Unipotente Klassen von B	185
A.11	Die Konjugiertenklassen von B	186
A.12	Fusionen der Konjugiertenklassen von B in ${}^3D_4(q)$	188
A.13	F -Konjugiertenklassen von $\mathbf{W}_{L_P}$	190
A.14	Maximale Tori von L_P	190
A.15	Halbeinfache Klassen von L_P	191
A.16	Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von L_P	191
A.17	Die Konjugiertenklassen von L_P	192
A.18	F -Konjugiertenklassen von $\mathbf{W}_{L_Q}$	193
A.19	Maximale Tori von L_Q	193
A.20	Halbeinfache Klassen von L_Q	194
A.21	Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von L_Q	194
A.22	Die Konjugiertenklassen von L_Q	195
A.23	Halbeinfache Klassen von P	196
A.24	Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von P	197
A.25	Die Konjugiertenklassen von P	199
A.26	Fusionen der Konjugiertenklassen von B in P und Q	201
A.27	Fusionen der Konjugiertenklassen von P in ${}^3D_4(q)$	203
A.28	Fusionen der Konjugiertenklassen von P in L_P	205
A.29	Halbeinfache Klassen von Q	207
A.30	Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von Q	208
A.31	Die Konjugiertenklassen von Q	209

A.32 Fusionen der Konjugiertenklassen von Q in ${}^3D_4(q)$	211
A.33 Fusionen der Konjugiertenklassen von Q in L_Q	213
A.34 Die Konjugiertenklassen von $C_P(D)$	215
A.35 Die unipotenten Charaktere von ${}^3D_4(q)$, q ungerade	216
A.36 Parametrisierung der irreduziblen Charaktere von L_P	218
A.37 Charaktertafel von L_P	218
A.38 Parametrisierung der irreduziblen Charaktere von L_Q	219
A.39 Charaktertafel von L_Q	219
A.40 Parametrisierung einiger Charaktere von B	220
A.41 Charaktere von B	220
A.42 Konjugiertenklassen von U_P	223
A.43 Parametrisierung der irreduziblen Charaktere von U_P	223
A.44 Charaktertafel von U_P	224
A.45 Parametrisierung der irreduziblen Charaktere von P	224
A.46 Charaktertafel von P	225
A.47 Tabelle zu den Einschränkungen der irreduziblen Charaktere von P auf U_P	240
A.48 Einschränkung der unipotenten Charaktere auf P	240
A.49 Charaktere von $C_P(D)$	244
A.50 Konjugiertenklassen von $\overline{U}_Q$	245
A.51 Parametrisierung der irreduziblen Charaktere von $\overline{U}_Q$	245
A.52 Charaktertafel von $\overline{U}_Q$	246
A.53 Parametrisierung irreduzibler Charaktere von Q	246
A.54 Irreduzible Charaktere von Q	248
A.55 Einschränkung der unipotenten Charaktere auf Q	255

Vorwort

Eines der bekanntesten Ergebnisse der Gruppentheorie ist die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen. Danach ist jede solche Gruppe entweder zyklisch von Primzahlordnung, eine alternierende Gruppe, eine einfache Gruppe vom Lie-Typ, d.h. ein endliches Analogon einer klassischen Lie-Gruppe, oder eine von 26 sporadischen Ausnahmegruppen. Dieses Klassifikationsresultat klärt eine zentrale Frage der Gruppentheorie, nämlich die nach den Bausteinen, aus denen endliche Gruppen aufgebaut sind. Damit erhebt sich die Frage nach der Struktur dieser Bausteine.

Eine Möglichkeit, die Struktur einer gegebenen Gruppe G zu untersuchen, besteht darin, die Abbildungen

$$\varphi : G \longrightarrow GL_n(K)$$

von der Gruppe G in die Gruppe der invertierbaren $n \times n$ -Matrizen über einem fest vorgegebenen Körper K zu studieren, die für alle Gruppenelemente g_1 und g_2 aus G das Produkt $g_1 \cdot g_2$ dieser Gruppenelemente auf das Matrixprodukt von $\varphi(g_1)$ und $\varphi(g_2)$ abbilden. Solche Abbildungen heißen Darstellungen der Gruppe G . Sie bilden den Ausgangspunkt der Darstellungstheorie endlicher Gruppen. Auch hier stellt sich die Frage nach den kleinsten Bausteinen, den sogenannten irreduziblen Darstellungen. Zu jeder endlichen Gruppe gibt es – bezüglich eines geeigneten Äquivalenzbegriffes – nur endlich viele irreduzible Darstellungen. Der erste Schritt zum Verständnis aller Darstellungen einer Gruppe G besteht also darin, die irreduziblen Darstellungen zu beschreiben.

Ist $\varphi : G \longrightarrow GL_n(K)$ eine Darstellung der endlichen Gruppe G über einem Körper K , so sind viele Eigenschaften dieser Darstellung bereits in der Spurabbildung

$$\chi : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & K \\ g & \longmapsto & \text{Spur } \varphi(g) \end{array}$$

enthalten. Diese Abbildung heißt der Charakter zur Darstellung φ . Da die Spur einer Matrix invariant unter Konjugation ist, sind die Charaktere konstant auf den Konjugiertenklassen von G . Ist K der Körper der komplexen Zahlen, so stimmt die Anzahl der irreduziblen Charaktere – damit sind die Charaktere der irreduziblen Darstellungen von G über K gemeint – mit der Anzahl der Konjugiertenklassen von G überein. Somit lassen

sich die irreduziblen Charaktere einer endlichen Gruppe G über dem Körper der komplexen Zahlen in einer quadratischen Matrix anordnen. Diese nennt man die Charaktertafel der Gruppe G .

Warum ist es sinnvoll, sich mit Charaktertafeln zu beschäftigen? Zum einen verrät die Charaktertafel einer endlichen Gruppe viele Informationen über die Struktur dieser Gruppe und ihrer Darstellungen. Zum anderen lassen sich Teile der Charaktertafel häufig allein durch kombinatorische oder zahlentheoretische Überlegungen bestimmen, ohne dass eine explizite Kenntnis der zugrundeliegenden Darstellungen nötig ist.

Die meisten endlichen einfachen Gruppen sind vom Lie-Typ. Pierre Deligne und George Lusztig haben 1976 in [13] die Charaktertheorie der Gruppen vom Lie-Typ begründet. Diese Theorie ist seitdem sehr gut untersucht worden. In der Theorie der Gruppen vom Lie-Typ treten gewisse Untergruppen in natürlicher Weise auf, die parabolischen Untergruppen. Eine natürliche, weiterführende Fragestellung ist die nach der Charaktertheorie für parabolische Untergruppen. Warum ist es nun aber sinnvoll, sich mit Charakteren und Charaktertafeln parabolischer Untergruppen zu beschäftigen? Eine Motivation hierfür liegt in der Anwendung dieser Charaktertafeln auf die Theorie der Darstellungen endlicher Gruppen vom Lie-Typ über Körpern von Primzahlcharakteristik $\ell > 0$, beispielsweise endlichen Körpern. Hier gibt es noch viele offene Fragen und ungelöste Probleme. Das Teilgebiet der Darstellungstheorie endlicher Gruppen, das sich mit Darstellungen über solchen Körpern befasst, wird als modulare Darstellungstheorie bezeichnet.

Richard Brauer hat in seinen Arbeiten eine Verbindung zwischen der Darstellungstheorie einer endlichen Gruppe G über dem Körper der komplexen Zahlen und der Darstellungstheorie dieser Gruppe über Körpern von Primzahlcharakteristik ℓ hergestellt. Bezeichnet man die Gruppenelemente von G , deren Ordnung nicht durch ℓ teilbar ist, als die ℓ -regulären Elemente von G , so hat Brauer gezeigt, wie man die Werte des Charakters einer Darstellung über einem Körper der Charakteristik ℓ auf den ℓ -regulären Elementen von G in den Körper der komplexen Zahlen „heben“ kann. Diese neue komplexwertige Funktion auf den ℓ -regulären Elementen von G heißt Brauercharakter der Darstellung.

Brauer hat bewiesen, dass die Einschränkung des Charakters einer Darstellung über den komplexen Zahlen auf die ℓ -regulären Elemente stets ein Brauercharakter ist. Auch die Brauercharaktere setzen sich aus kleinsten Bausteinen zusammen, den irreduziblen Brauercharakteren. Die Zerlegung der irreduziblen Charaktere über dem Körper der komplexen Zahlen in die irreduziblen Brauercharaktere wird in einer Matrix festgehalten, deren Zeilen durch die irreduziblen Charaktere über dem Körper der komplexen Zahlen indiziert und deren Spalten durch die irreduziblen Brauercharaktere indiziert sind. Diese Matrix wird Zerlegungsmatrix von G genannt. Ihre Einträge, lauter nichtnegative ganze Zahlen, heißen Zerlegungszahlen von G . Sie bilden die Brücke zwischen der Darstellungstheorie der Gruppe G über dem Körper der komplexen Zahlen und der Darstellungstheorie über Körpern von Primzahlcharakteristik ℓ .

Im Zentrum dieser Arbeit stehen die Steinbergschen Trialitätsgruppen ${}^3D_4(q)$. Sie bilden eine der Serien von unendlich vielen einfachen Gruppen vom Lie-Typ, die in der eingangs erwähnten Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen auftreten. Die Bezeichnung „ ${}^3D_4(q)$ “ für die Trialitätsgruppen kommt folgendermaßen zustande: Die endlichen einfachen Gruppen vom Lie-Typ werden mit Hilfe der endlichdimensionalen komplexen einfachen Lie-Algebren klassifiziert: Eine solche Gruppe ${}^kG_n(q)$ wird durch mehrere Parameter bestimmt: G beschreibt den Dynkin-Typ der zugehörigen komplexen einfachen Lie-Algebra und k die Ordnung einer Symmetrie des Dynkin-Diagramms. Ist k gleich 1, so wird dieser Parameter weggelassen. Der Parameter n gibt den Lie-Rang und q die Ordnung des Definitionskörpers an.

Diese Arbeit gliedert sich in zwei Teile: Das Ziel des ersten Teils (Kapitel 1 bis 4) besteht in der generischen, also für alle q gleichzeitigen Bestimmung der Charaktertafeln aller maximalen parabolischen Untergruppen der Steinbergschen Trialitätsgruppen ${}^3D_4(q)$. Für jede Primzahlpotenz q gibt es in den Trialitätsgruppen bis auf Konjugation genau zwei maximale parabolische Untergruppen. Eine Produktzerlegung der parabolischen Untergruppen, die sogenannte Levi-Zerlegung, ermöglicht die Anwendung der Clifford-Theorie, eines Werkzeugs zur Konstruktion irreduzibler Charaktere.

Hiermit gelang in dieser Arbeit die vollständige generische Berechnung der Charaktertafel einer der beiden maximalen parabolischen Untergruppen sowie eines großen Teils der Charaktertafel der anderen maximalen parabolischen Untergruppe der Steinbergschen Trialitätsgruppen.

Der zweite Teil dieser Arbeit (Kapitel 5 und 6) behandelt die Anwendung dieser Charaktertafeln auf die modulare Darstellungstheorie der Trialitätsgruppen ${}^3D_4(q)$. Es werden hier ausschließlich solche Darstellungen von ${}^3D_4(q)$ behandelt, bei denen die Charakteristik ℓ des Körpers, über dem die Darstellungen betrachtet werden, kein Teiler von q ist. Bei solchen Darstellungen spricht man von Darstellungen in nicht-definierender Charakteristik. Die Zerlegungszahlen der Steinbergschen Trialitätsgruppen ${}^3D_4(q)$ in nicht-definierender Charakteristik wurden zu einem großen Teil im Jahr 1990 von Meinolf Geck in [19] berechnet. Einige der Zerlegungszahlen konnten dort jedoch nicht bestimmt werden. Ihre Berechnung bildet seit nunmehr über 10 Jahren ein offenes Problem.

Diese Zerlegungszahlen hängen von der multiplikativen Ordnung e von q modulo ℓ ab. Nichttriviale Ergebnisse erhält man nur in den Fällen $e = 12, 6, 3, 2$ oder 1, wobei der Fall $e = 12$ bereits vollständig von Meinolf Geck gelöst werden konnte. Ein Anliegen dieser Arbeit besteht darin, einige der Lücken in den Fällen $e = 6$ und $e = 3$ durch Anwendung neuerer Methoden zu schließen.

Hierbei spielen die parabolischen Untergruppen die folgende Rolle: Zum einen lassen sich aus den Charaktertafeln der parabolischen Untergruppen durch Induzieren Charaktere der Trialitätsgruppen konstruieren. Einige von diesen, die sogenannten projektiven Charaktere, liefern obere Schranken für die Zerlegungszahlen der Trialitätsgruppen. Zum

anderen sind in den beiden Fällen $e = 6$ und $e = 3$ die ℓ -Sylowgruppen der parabolischen Untergruppen zyklisch. Diese Tatsache und weitere gruppentheoretische Eigenschaften der parabolischen Untergruppen ermöglichen es, die Zerlegungszahlen dieser Untergruppen vollständig zu bestimmen. Die so erhaltene Kenntnis der modularen Darstellungstheorie der parabolischen Untergruppen legt folgendes Vorgehen nahe, das durch T. Okuyamas und K. Wakis Arbeit [35] über die Zerlegungszahlen der symplektischen Gruppen $Sp_4(q)$ inspiriert wurde:

Man konstruiert zunächst eine geeignete modulare Darstellung der Trialitätsgruppen, so dass eine der gesuchten Zerlegungszahlen als Vielfachheit eines irreduziblen Bausteins dieser Darstellung auftritt. Als nächstes betrachtet man dann die Einschränkung dieser Darstellung auf eine parabolische Untergruppe. Aus der genauen Kenntnis der Darstellungstheorie dieser parabolischen Untergruppe lassen sich dann Informationen über die gesuchte Zerlegungszahl gewinnen.

Mit den soeben beschriebenen Methoden werden in der vorliegenden Arbeit zwei der bis dahin unbekannten Zerlegungszahlen explizit bestimmt (eine im Fall $e = 6$ und eine im Fall $e = 3$). Für einige weitere der bislang unbekannten Zerlegungszahlen in diesen beiden Fällen konnten die bisher bekannten unteren und oberen Schranken verbessert werden.

Inhalt der einzelnen Kapitel

Im Verlauf dieser Arbeit werden Konjugiertenklassen von Untergruppen der Steinbergschen Trialitätsgruppen sowie Fusionen zwischen diesen Konjugiertenklassen berechnet. Das erste Kapitel dient dazu, Methoden zum effizienten Rechnen in diesen Gruppen zur Verfügung zu stellen. Hierbei werden die Steinbergschen Trialitätsgruppen als Gruppen von Fixpunkten eines Frobeniusmorphisms von zusammenhängenden reduktiven linearen algebraischen Gruppen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper aufgefasst. Da solche algebraischen Gruppen untereinander große strukturelle Gemeinsamkeiten aufweisen, wird gleich das Problem des Rechnens in reduktiven algebraischen Gruppen betrachtet. Jede reduktive lineare algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper lässt sich durch eine Präsentation beschreiben, die zum effizienten Rechnen gut geeignet ist. Diese sogenannte Steinberg-Päsentation und ein Algorithmus zum Rechnen in den betrachteten algebraischen Gruppen werden im ersten Kapitel beschrieben.

Das zweite Kapitel beinhaltet eine Beschreibung der Definition und Konstruktion der Steinbergschen Trialitätsgruppen ${}^3D_4(q)$. Es werden insbesondere die zum Rechnen notwendigen Relationen der Präsentation aus dem ersten Kapitel explizit bestimmt und angegeben.

Die Struktur der Trialitätsgruppen ${}^3D_4(q)$ für ungerades q unterscheidet sich von der für gerades q . Ab dem dritten Kapitel wird bei der Betrachtung der Trialitätsgruppen ${}^3D_4(q)$ stets vorausgesetzt, dass q eine ungerade Zahl ist. Unter dieser Voraussetzung wird mit

den Vorbereitungen zur Bestimmung der generischen Charaktertafel zweier maximaler parabolischer Untergruppen P und Q von ${}^3D_4(q)$ begonnen. Eine wesentliche Ingredienz zur Bestimmung von Charaktertafeln ist die Kenntnis der Konjugiertenklassen.

Das dritte Kapitel beschreibt zunächst noch einmal kurz die Konjugiertenklassen der Trialitätsgruppen sowie einer Boreluntergruppe B . Der größte Teil des Kapitels widmet sich dann der Berechnung und Parametrisierung der Konjugiertenklassen von P und Q sowie deren Fusionen in ${}^3D_4(q)$. Diese Fusionen werden später insbesondere zum Einschränken irreduzibler Charaktere von ${}^3D_4(q)$ auf P beziehungsweise Q benötigt. Die hier vorgestellten und benutzten Methoden lassen sich prinzipiell auch allgemeiner zur Berechnung von Konjugiertenklassen parabolischer Untergruppen in beliebigen endlichen Gruppen vom Lie-Typ verwenden.

Der Gegenstand des vierten Kapitels ist die gewöhnliche Darstellungstheorie der maximalen parabolischen Untergruppen P und Q von ${}^3D_4(q)$, insbesondere die vollständige Berechnung der generischen Charaktertafel von P sowie eines großen Teils der generischen Charaktertafel von Q . Bei der Bestimmung der Charaktertafeln von P und Q werden die folgenden drei Methoden benutzt:

- 1) Levi-Zerlegung und Clifford-Theorie,
- 2) Einschränken der irreduziblen Charaktere von ${}^3D_4(q)$,
- 3) Induzieren irreduzibler Charaktere einer Boreluntergruppe.

Im fünften Kapitel wird mit der modularen Darstellungstheorie in nicht-definierender Charakteristik der Steinbergschen Trialitätsgruppen und ihrer parabolischen Untergruppen begonnen. Die ℓ -modularen Zerlegungszahlen von ${}^3D_4(q)$ hängen von der multiplikativen Ordnung von q modulo ℓ ab, die in dieser Arbeit mit e bezeichnet wird. Teilt ℓ die Gruppenordnung $|{}^3D_4(q)|$ nicht, so liefert die ℓ -modulare Darstellungstheorie von ${}^3D_4(q)$ „im Wesentlichen“ die gleichen Ergebnisse wie die gewöhnliche Darstellungstheorie. Es wird hier daher nur der Fall betrachtet, dass ℓ ein Teiler von $|{}^3D_4(q)|$ ist. Hieraus folgt $e = 12, 6, 3, 2$ oder 1 . Im Fall $e = 3$ wird ein ℓ -Block von P bestimmt, d.h. es werden die irreduziblen Charaktere von P angegeben, die in diesem Block liegen, und es werden der Brauerbaum, die Zerlegungsmatrix sowie die Loewy-Struktur der unzerlegbaren Moduln dieses Blocks bestimmt. Wesentliche Hilfsmittel, die hierbei benutzt werden, sind die Clifford-Theorie für Blöcke, Fong-Reduktion und die Brauer-Dade-Theorie für Blöcke mit zyklischem Defekt.

Das sechste Kapitel hat die ℓ -modularen Zerlegungszahlen der Trialitätsgruppen in den Fällen $e = 6$ und $e = 3$ zum Gegenstand. Es werden zwei der bislang unbekannten Zerlegungszahlen explizit bestimmt, und für weitere werden neue, bessere Schranken bewiesen. Die Bestimmung der einen dieser beiden Zerlegungszahlen lässt sich in die folgenden drei Schritte einteilen:

1. Schritt:

Analyse des Permutationsmoduls M der Trialitätsgruppen auf den Nebenklassen nach der parabolischen Untergruppe Q . Es werden Kopf und Sockel und ein unzerlegbarer direkter Summand von M sowie dessen Loewy-Struktur bestimmt. Hierbei zeigt sich, dass die gesuchte Zerlegungszahl als Vielfachheit eines Kompositionsfaktors von M auftritt.

2. Schritt:

Analyse der Einschränkung von M auf einen ℓ -Block von P . Es werden die unzerlegbaren direkten Summanden der Einschränkung von M auf einen Block von P und deren Loewy-Struktur bestimmt. Der Beweis hierzu beruht auf einer Verallgemeinerung der Green-Korrespondenz von Burry und Carlson.

3. Schritt:

Vergleich von M mit der Einschränkung von M auf den Block von P . Hieraus ergibt sich schließlich die gesuchte Zerlegungszahl.

Die andere Zerlegungszahl, die in dieser Arbeit berechnet werden konnte, sowie die verbesserten Schranken für einige weitere Zerlegungszahlen in den Fällen $e = 6$ und $e = 3$ werden durch Induktion projektiver Charaktere von P und Q nach ${}^3D_4(q)$ bestimmt.

Viele der in dieser Arbeit vorgenommenen Berechnungen, beispielsweise der Konjugiertenklassen verschiedener Untergruppen der Trialitätsgruppen sowie die Bestimmung von Skalarprodukten und Normen von Charakteren, wurden mit Hilfe des Computeralgebrapakets CHEVIE[21], das auf GAP [36] und Maple[8] basiert, durchgeführt. Hierzu wurde der in Kapitel 1 beschriebene Algorithmus zum Rechnen in zusammenhängenden reduktiven Gruppen mit Hilfe des Programmpakets CHEVIE [21] im Computeralgebrasystem GAP [36] implementiert. Zusätzlich wurden eigene Maple-Programme, basierend auf CHEVIE, zum Einschränken, Induzieren und Inflationieren von Charakteren zwischen generischen Charaktertafeln entwickelt.

Der Einsatz dieser Computerprogramme bietet zwei Vorteile: Zum einen erleichtern sie die mühsamen Berechnungen erheblich und verringern so die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Rechenfehlern. Zum anderen ermöglichen sie gute Tests für Charaktere, beispielsweise die Überprüfung der Orthogonalitätsrelationen für Charaktertafeln.

Eine gute Übersicht über die in dieser Arbeit benutzte gewöhnliche Darstellungstheorie endlicher Gruppen vom Lie-Typ findet man in den Büchern von Digne und Michel [15] sowie von Carter [7]. Einen guten Einblick in die modulare Darstellungstheorie endlicher Gruppen vom Lie-Typ in nicht-definierender Charakteristik erhält man durch die Habilitationsschrift von Hiß [24].

Die Darstellung der Rechenergebnisse der einzelnen Kapitel erfordert bisweilen lange Tabellen, von denen einige über mehrere Seiten gehen. Der besseren Übersichtlichkeit wegen sind alle Tabellen, die länger als wenige Zeilen sind, in einem Anhang gesammelt.

Danksagungen

Bedanken möchte ich mich bei allen, die an der Erstellung dieser Arbeit mitgewirkt haben, an erster Stelle bei Prof. Dr. Gerhard Hiß für die interessante Aufgabenstellung und seine stete Betreuung und Unterstützung. Die zahlreichen Gespräche und Diskussionen mit ihm waren mir eine sehr wertvolle Hilfe.

Bei Prof. Dr. Herbert Pahlings möchte ich mich für seine Unterstützung und sein Interesse an dieser Arbeit bedanken sowie für seine Bereitschaft, das Korreferat zu übernehmen.

Mein besonderer Dank gilt Dr. Frank Lübeck, der immer Zeit fand, auf meine Fragen einzugehen, und durch viele Anregungen zum Gelingen dieser Arbeit beitrug. Eine bessere Informationsquelle über das Rechnen in endlichen Gruppen vom Lie-Typ und generische Charaktertafeln als die Gespräche mit ihm ist kaum vorstellbar.

Der Deutschen Forschungsgemeinschaft danke ich für die Förderung durch ein Doktorandenstipendium im Rahmen der Graduiertenkollegs „Analyse und Konstruktion in der Mathematik“ und „Hierarchie und Symmetrie in mathematischen Modellen“.

Ein Teil dieser Arbeit ist entstanden, während ich als Graduate Visiting Student das akademische Jahr 2000/2001 an der University of Chicago verbringen durfte. In den Gesprächen mit und den Vorlesungen von Prof. Dr. Jonathan L. Alperin und Prof. Dr. George Glauberman habe ich viel über die Darstellungstheorie und Gruppentheorie gelernt, das als Hintergrundwissen mit in diese Arbeit eingeflossen ist. Ihnen beiden sei dafür herzlich gedankt. Ausdrücklich bedanken möchte ich mich auch bei dem Sprecher des Graduiertenkollegs „Analyse und Konstruktion in der Mathematik“, Herrn Prof. Dr. Volker Enß, ohne dessen tatkräftige Unterstützung dieser Aufenthalt wohl nicht möglich gewesen wäre.

Schließlich möchte ich mich bei allen Mitarbeitern des Lehrstuhls D für Mathematik für das gute und freundschaftliche Arbeitsklima bedanken. Hierbei geht mein Dank insbesondere an Dr. Jürgen Müller, Max Neunhöffer, Felix Noeske und Christoph Köhler.

Kapitel 1

Rechnen in Gruppen vom Lie-Typ

Im Verlauf dieser Arbeit werden Konjugiertenklassen von Untergruppen der Steinberg-schen Trialitätsgruppen sowie Fusionen zwischen diesen Konjugiertenklassen berechnet. Es ist daher zweckmäßig, Methoden zum effizienten Rechnen in diesen Gruppen zur Verfügung zu haben. An vielen Stellen wird es im Folgenden nützlich sein, die Trialitätsgruppen als Untergruppen von zusammenhängenden reductiven linearen algebraischen Gruppen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper aufzufassen. Da diese algebraischen Gruppen untereinander große strukturelle Gemeinsamkeiten aufweisen, soll hier gleich das Problem des Rechnens in solchen reductiven algebraischen Gruppen betrachtet werden.

Jede lineare algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{F}$ lässt sich in eine volle lineare Gruppe über dem Körper $\mathbb{F}$ einbetten. Insbesondere die klassischen Gruppen (z.B. die linearen, orthogonalen oder symplektischen Gruppen) besitzen treue Matrixdarstellungen, die sich zum Rechnen in diesen Gruppen benutzen lassen. Man könnte daher versuchen, die Trialitätsgruppen als Untergruppen einer geeigneten Matrixgruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{F}$ zu realisieren und dann zwei Gruppenelemente miteinander multiplizieren, indem man die zugehörigen Matrizen miteinander multipliziert. Für die Trialitätsgruppen – und das gilt für alle exzeptionellen Gruppen vom Lie-Typ – sind solche Matrixdarstellungen jedoch im Allgemeinen nicht gut handhabbar.

Das Vorgehen in Meinolf Gecks Dissertation [19] und insbesondere die dort angegebenen Relationen in den Tafeln 3.3.1 bis 3.3.3, S. 66 ff, legen einen anderen Zugang nahe. Jede zusammenhängende reductive lineare algebraische Gruppe über einem algebraisch abgeschlossenen Körper lässt sich durch eine Präsentation beschreiben, die zum effizienten Rechnen gut geeignet ist. Dieser Zugang hat auch den Vorteil, dass er bei den nicht-klassischen reductiven linearen algebraischen Gruppen angewandt werden kann.

Diese Präsentation sowie ein Algorithmus zum Rechnen in solchen algebraischen Gruppen sollen in diesem Kapitel beschrieben werden.

1.1 Reduktive algebraische Gruppen und Wurzeldata

In diesem Abschnitt sollen einige Fakten aus der Theorie der reduktiven linearen algebraischen Gruppen über algebraisch abgeschlossenen Körpern ohne Beweise zusammengestellt werden. Ausführlichere Informationsquellen hierzu sind die Bücher von T.A. Springer [40] und J.E. Humphreys [28]. Die in diesem Abschnitt gewählte Einführung des Wurzeldataums folgt im Wesentlichen Section 1.9 aus Carters Buch [7]. Unterschiede zwischen der hier gewählten Darstellung und der angegebenen Literatur ergeben sich dadurch, dass wir in diesem Kapitel meistens Operationen von rechts und nicht von links betrachten.

Wir beginnen mit einer zusammenhängenden reduktiven linearen algebraischen Gruppe $\mathbf{G}$ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{F}$ endlicher Charakteristik p . Wir sagen, dass p die *natürliche* oder *definierende Charakteristik* von $\mathbf{G}$ ist.

In $\mathbf{G}$ wählen wir einen maximalen Torus $\mathbf{T}$. Die Gruppe X der Homomorphismen algebraischer Gruppen von $\mathbf{T}$ nach $\mathbb{F}^\times$ heißt die *Charaktergruppe* von $\mathbf{T}$. In gleicher Weise führen wir die *Kocharaktergruppe* Y als Gruppe der Homomorphismen algebraischer Gruppen von $\mathbb{F}^\times$ nach $\mathbf{T}$ ein. Wir schreiben die Gruppenoperationen in X und Y additiv. Die Komposition eines $\gamma \in Y$ und eines $\chi \in X$ ergibt einen Homomorphismus algebraischer Gruppen von $\mathbb{F}^\times$ nach $\mathbb{F}^\times$. Dieser hat die Form $\chi \circ \gamma : \rho \mapsto \rho^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$. Die Zuordnung $(\chi, \gamma) \mapsto \langle \chi, \gamma \rangle := n$ liefert eine Paarung zwischen (den $\mathbb{Z}$ -Moduln) X und Y , d.h. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist $\mathbb{Z}$ -bilinear und es gibt eine $\mathbb{Z}$ -Basis von X und eine $\mathbb{Z}$ -Basis von Y , die bezüglich $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dual zueinander sind.

Es sei nun $\mathbf{B}$ eine Boreluntergruppe von $\mathbf{G}$, die $\mathbf{T}$ enthält. Dann ist $\mathbf{B}$ ein semidirektes Produkt $\mathbf{B} = \mathbf{T} \ltimes \mathbf{U}$ von algebraischen Gruppen, wobei $\mathbf{U}$ das unipotente Radikal von $\mathbf{B}$ bezeichne. In $\mathbf{G}$ gibt es genau eine Boreluntergruppe $\mathbf{B}^-$, die $\mathbf{T}$ enthält und für die $\mathbf{B} \cap \mathbf{B}^- = \mathbf{T}$ gilt. Für $\mathbf{B}^-$ existiert eine entsprechende Zerlegung in ein semidirektes Produkt $\mathbf{B}^- = \mathbf{T} \ltimes \mathbf{U}^-$, wobei hier $\mathbf{U}^-$ das unipotente Radikal von $\mathbf{B}^-$ bedeute.

Wir betrachten nun die minimalen nichttrivialen Untergruppen von $\mathbf{U}$ und $\mathbf{U}^-$, die von $\mathbf{T}$ normalisiert werden. Man kann zeigen, dass diese Gruppen eindimensional, zusammenhängend und unipotent sind. Sie sind also als algebraische Gruppen isomorph zur additiven Gruppe $\mathbf{G}_a$ von $\mathbb{F}$. Die Operation (von rechts) von $\mathbf{T}$ auf diesen eindimensionalen Untergruppen liefert Homomorphismen von $\mathbf{T}$ in die Gruppe $\text{Aut}(\mathbf{G}_a)$ der algebraischen Automorphismen von $\mathbf{G}_a$. Jeder solche Automorphismus hat die Form $\rho \mapsto \lambda \cdot \rho$ für ein $\lambda \in \mathbb{F}^\times$. Also ist $\text{Aut}(\mathbf{G}_a)$ isomorph zu $\mathbb{F}^\times$. Jede der eindimensionalen minimalen Untergruppen liefert also einen Homomorphismus von $\mathbf{T}$ nach $\mathbb{F}^\times$. Diese Homomorphismen sind Homomorphismen von algebraischen Gruppen und somit Elemente von X . Die Elemente von X , die man auf diese Weise erhält, heißen *Wurzeln* von $\mathbf{G}$ bezüglich $\mathbf{T}$. Je zwei verschiedene der eindimensionalen Untergruppen liefern auch verschiedene Wurzeln. Die Menge Φ aller Wurzeln von $\mathbf{G}$ bezüglich $\mathbf{T}$ heißt das *Wurzelsystem* von $\mathbf{G}$ bezüglich $\mathbf{T}$.

Das Wurzelsystem Φ ist eine endliche Teilmenge von $X - \{0\}$, die nicht von der Wahl der $\mathbf{T}$ umfassenden Boreluntergruppe abhängt. Für jede Wurzel $r \in \Phi$ ist auch $-r \in \Phi$. Die zu einer Wurzel r gehörende eindimensionale Untergruppe von $\mathbf{U}$ bezeichnen wir mit X_r . Die Untergruppen X_r für $r \in \Phi$ heißen die *Wurzeluntergruppen* von $\mathbf{G}$.

Wir untersuchen nun die von X_r und X_{-r} erzeugte Untergruppe $\langle X_r, X_{-r} \rangle$ von $\mathbf{G}$ etwas genauer. Es gibt einen Homomorphismus $\phi_r : SL_2(\mathbb{F}) \rightarrow \langle X_r, X_{-r} \rangle$ mit

$$\phi_r \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{F} \right\} \right) = X_r \text{ und } \phi_r \left(\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{F} \right\} \right) = X_{-r}.$$

Das Bild von

$$\left\{ \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{F}^\times \right\}$$

unter ϕ_r ist eine eindimensionale Untergruppe von $\mathbf{T}$. Durch

$$r^\vee(\lambda) := \phi_r \left(\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \right)$$

wird also eine Abbildung von $\mathbb{F}^\times$ nach $\mathbf{T}$ definiert. Man kann zeigen, dass $r^\vee$ ein Homomorphismus von algebraischen Gruppen, also ein Element der Kocharaktergruppe Y ist. Wir nennen $r^\vee$ die zu r gehörige *Kowurzel*. Die Menge $\Phi^\vee$ aller Kowurzeln ist eine endliche Teilmenge von Y .

Wir haben nun jeder zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe ein Quadrupel $(X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$ zugeordnet. Bei diesem Quadrupel handelt es sich um ein Wurzeldatum in folgendem Sinne:

1.1.1 Definition (Wurzeldatum)

Es seien X und Y freie abelsche Gruppen endlichen Ranges mit einer dualen Paarung $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \rightarrow \mathbb{Z}$. Es seien ferner Φ und $\Phi^\vee$ endliche Teilmengen von X bzw. Y mit einer Bijektion $^\vee : \Phi \rightarrow \Phi^\vee, r \mapsto r^\vee$. Für $r \in \Phi$ definieren wir Endomorphismen s_r und $s_r^\vee$ von X bzw. Y durch:

$$\begin{aligned} s_r(x) &:= x - \langle x, r^\vee \rangle r, \\ s_r^\vee(y) &:= y - \langle r, y \rangle r^\vee \end{aligned} \tag{1.1}$$

($x \in X, y \in Y$). Gilt $\langle r, r^\vee \rangle = 2$ und $s_r(\Phi) = \Phi$ und $s_r^\vee(\Phi^\vee) = \Phi^\vee$ für alle $r \in \Phi$, so heißt $(X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$ ein *Wurzeldatum*.

Das der zusammenhängenden reduktiven linearen Gruppe $\mathbf{G}$ wie oben zugeordnete Wurzeldatum hängt von der Wahl des maximalen Torus $\mathbf{T}$ ab (nicht jedoch von der Wahl der

$\mathbf{T}$ umfassenden Boreluntergruppe $\mathbf{B}$). Wir wollen es daher mit

$$\Psi(\mathbf{G}, \mathbf{T}) := (X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$$

bezeichnen. Die Abhängigkeit von $\mathbf{T}$ ist jedoch keine wesentliche. Ist nämlich $\mathbf{T}'$ ein weiterer maximaler Torus von $\mathbf{G}$, so kann man zeigen, dass die Wurzeldaten $\Psi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ und $\Psi(\mathbf{G}, \mathbf{T}')$ im Sinne der folgenden Definition isomorph sind:

1.1.2 Definition (Isomorphie von Wurzeldaten)

Zwei Wurzeldaten $(X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$ und $(X', \Phi', Y', \Phi'^\vee)$ mit dualen Paarungen $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bzw. $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ heißen *isomorph*, wenn es Abbildungen $f : X \rightarrow X'$ und $g : Y \rightarrow Y'$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

- (a) f und g sind $\mathbb{Z}$ -Modulisomorphismen,
- (b) $\langle f(\chi), g(\gamma) \rangle' = \langle \chi, \gamma \rangle$ für alle $\chi \in X, \gamma \in Y$,
- (c) $f(\Phi) = \Phi'$ und $g(\Phi^\vee) = \Phi'^\vee$,
- (d) $g(r^\vee) = f(r)^\vee$ für alle $r \in \Phi$.

Aus der Tatsache, dass in einer zusammenhängenden algebraischen Gruppe alle maximalen Tori konjugiert sind, folgt, dass das Wurzeldatum $\Psi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ einer zusammenhängenden reduktiven Gruppe $\mathbf{G}$ bis auf Isomorphie nicht von der Wahl von $\mathbf{T}$ abhängt. Wir nennen daher etwas unpräzise $\Psi(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ häufig einfach nur das zu $\mathbf{G}$ gehörige Wurzeldatum.

Die zusammenhängenden reduktiven linearen algebraischen Gruppen über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{F}$ lassen sich über die Wurzeldaten klassifizieren: Zu jedem Wurzeldatum Ψ gibt es bis auf Isomorphie von algebraischen Gruppen genau eine zusammenhängende reduktive lineare algebraische Gruppe $\mathbf{G}$ über dem Körper $\mathbb{F}$, deren Wurzeldatum isomorph zu Ψ ist.

Eine zusammenhängende reduktive lineare algebraische Gruppe, die keinen von $\{1\}$ verschiedenen auflösbaren zusammenhängenden abgeschlossenen Normalteiler enthält, heißt *halbeinfach*. Ist $\mathbf{G}$ eine halbeinfache algebraische Gruppe mit Wurzeldatum $(X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$ und gilt $X = \mathbb{Z}\Phi$, so heißt $\mathbf{G}$ *halbeinfach von adjungiertem Typ*. Diese Gruppen werden insbesondere in Abschnitt 1.4 noch eine wichtige Rolle spielen.

1.2 Wurzelsysteme und Weylgruppen

Wir behalten die Bezeichnungen aus dem vorigen Abschnitt bei. Es sei also weiter $\mathbf{T}$ ein maximaler Torus der zusammenhängenden reduktiven Gruppe $\mathbf{G}$ und $\Psi(\mathbf{G}, \mathbf{T}) = (X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$ das zugehörige Wurzeldatum. Wir wählen eine Boreluntergruppe $\mathbf{B}$ von $\mathbf{G}$,

die $\mathbf{T}$ enthält und zerlegen $\mathbf{B}$ wie im vorigen Abschnitt: $\mathbf{B} = \mathbf{T} \ltimes \mathbf{U}$. In entsprechender Weise schreiben wir die entgegengesetzte Boreluntergruppe $\mathbf{B}^-$ als semidirektes Produkt von algebraischen Gruppen: $\mathbf{B}^- = \mathbf{T} \ltimes \mathbf{U}^-$.

Es sei Q der von Φ erzeugte $\mathbb{Z}$ -Untermodul von X . Die Menge Φ der Wurzeln können wir als Teilmenge von $Q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ auffassen. Man kann zeigen, dass Φ ein *Wurzelsystem* (im Sinne der Definition von Bourbaki [3], Ch. VI, §1) in $Q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ist. Diejenigen Wurzeln $r \in \Phi$, deren zugehörige Wurzeluntergruppen X_r in $\mathbf{U}$ enthalten sind, bilden die (durch $\mathbf{U}$ festgelegten) *positiven Wurzeln* Φ^+ des Wurzelsystems Φ . Die übrigen Wurzeln von Φ sind die negativen Wurzeln der angegebenen; sie gehören zu Wurzeluntergruppen, die in $\mathbf{U}^-$ enthalten sind. Die Menge der Kowurzeln $\Phi^\vee$ bildet in analoger Weise ein Wurzelsystem in $Q' \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, wobei Q' den von $\Phi^\vee$ erzeugten $\mathbb{Z}$ -Untermodul von Y bezeichne.

Weiter wollen wir mit $N(\mathbf{T})$ den Normalisator von $\mathbf{T}$ in $\mathbf{G}$ bezeichnen und mit $\mathbf{W}$ die Restklassengruppe $N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$. Die Gruppe $\mathbf{W}$ ist endlich und heißt *Weylgruppe* von $\mathbf{G}$. Die Weylgruppe $\mathbf{W}$ von $\mathbf{G}$ ist isomorph zu den Coxetergruppen, die durch die Reflektionen an den Wurzeln eines Fundamentalsystems von $\Phi \subseteq X$ beziehungsweise von $\Phi^\vee$ erzeugt werden. (Zu einer Wurzel r mit Kowurzel $r^\vee$ verstehen wir unter der Reflektion an r bzw. an $r^\vee$ die in (1.1) definierten Endomorphismen s_r und $s_r^\vee$ von X beziehungsweise Y .) Wir beschreiben noch kurz diesen Isomorphismus: $N(\mathbf{T})$ operiert auf $\mathbf{T}$ vermöge Konjugation, und da $\mathbf{T}$ abelsch ist, hängt die Operation von $n \in N(\mathbf{T})$ nur von der Restklasse $w := n\mathbf{T} \in \mathbf{W} = N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ ab. (Wir verwenden für diese Operation von $\mathbf{W}$ auf $\mathbf{T}$ dann auch die Schreibweise ${}^wt := {}^nt = ntn^{-1}$ und $t^w := t^n = n^{-1}tn$.) In kanonischer Weise sind hierdurch auch Operationen von $w \in \mathbf{W}$ auf X und Y erklärt, für $\chi \in X, \gamma \in Y, h \in \mathbf{T}$ und $\rho \in \mathbb{F}^\times$ schreiben wir:

$$\chi^w(h) := \chi(h^w) \text{ und } \gamma^w(\rho) := \gamma(\rho)^w \quad (1.2)$$

(die Schreibweise für die Operation auf X ist invers zu der auf Seite 18 in Carters Buch [7]; zur Begründung siehe Lübeck [34], Seite 23). Dabei gilt für alle $w \in \mathbf{W}$, dass $w(\Phi) = \Phi$ und $w(\Phi^\vee) = \Phi^\vee$ ist. Die Abbildung, die w die Operation von w auf X zuordnet, liefert den Isomorphismus von $N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ auf die Coxetergruppe zu Φ und entsprechend für Y . Es seien $r \in \Phi^+$ und s_r bzw. $s_r^\vee$ die Reflektionen an r bzw. $r^\vee$, sowie ϕ_r wie auf Seite 15. Dann ist ein Vertreter eines Urbildes unter diesen Isomorphismen von s_r bzw. $s_r^\vee$ in $N(\mathbf{T})$ durch $\phi_r \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.

1.3 Kommutatorrelationen

Es sei weiterhin $\mathbf{G}$ eine zusammenhängende reductive Gruppe mit maximalem Torus $\mathbf{T}$ und Wurzeldatum $\Psi(\mathbf{G}, \mathbf{T}) = (X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$. Wir wählen wieder Boreluntergruppen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{B}^-$ von $\mathbf{G}$ mit $\mathbf{T} \subseteq \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \cap \mathbf{B}^- = \mathbf{T}$. Die Boreluntergruppen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{B}^-$ zerlegen wir wieder in $\mathbf{B} = \mathbf{T} \ltimes \mathbf{U}$ und $\mathbf{B}^- = \mathbf{T} \ltimes \mathbf{U}^-$.

Jeder Wurzel $r \in \Phi$ hatten wir in Abschnitt 1.1 eine Wurzeluntergruppe $X_r \subseteq \mathbf{U} \cup \mathbf{U}^-$ zugeordnet. Man kann zeigen, dass $\mathbf{G}$ von $\mathbf{T}$ und den Wurzeluntergruppen X_r für $r \in \Phi$ erzeugt wird. Für das Rechnen in $\mathbf{G}$ ist es also plausibel, Relationen zwischen den Elementen der Wurzeluntergruppen zu suchen.

Wie bereits in Abschnitt 1.1 erwähnt, ist jede Wurzeluntergruppe X_r als algebraische Gruppe isomorph zur additiven Gruppe $\mathbf{G}_a$ von $\mathbb{F}$. Wir können also zu jeder Wurzel $r \in \Phi$ einen Isomorphismus von algebraischen Gruppen $x_r : \mathbf{G}_a \rightarrow X_r$ wählen. Diese Isomorphismen können so gewählt werden, dass

$$t^{-1} x_r(u) t = x_r(r(t)u) \quad (1.3)$$

für alle $u \in \mathbb{F}$ und $t \in \mathbf{T}$ gilt. Für den Kommutator $[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy$ zweier Gruppenelemente x und y gilt dann:

1.3.1 Satz (Kommutatorrelationen)

Es seien $r, s \in \Phi$ mit $r \neq \pm s$. Auf Φ sei eine beliebige Totalordnung gegeben. Für alle Paare natürlicher Zahlen i, j mit $ir + js \in \Phi$ existieren eindeutig bestimmte Konstanten $c_{r,s;i,j} \in \mathbb{F}$, so dass

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js} (c_{r,s;i,j} t^i u^j) \quad (1.4)$$

für alle $u, t \in \mathbb{F}$ gilt. Die Faktoren des Produkts auf der rechten Seite seien hierbei aufsteigend bezüglich der auf Φ gegebenen Totalordnung angeordnet.

Beweis: Siehe Proposition 8.2.1 und Proposition 8.2.3 in Springer [40]. ■

Es stellt sich nun natürlich die Frage nach der expliziten Berechnung der Koeffizienten $c_{r,s;i,j}$, die wir manchmal auch *Kommutatorformelkoeffizienten* nennen wollen. Doch bevor wir uns der Bestimmung der Koeffizienten $c_{r,s;i,j}$ aus der Kommutatorformel (1.4) zuwenden, wollen wir eine „geschicktere“ Wahl der Isomorphismen $x_r : \mathbf{G}_a \rightarrow X_r$ betrachten, die durch das folgende Lemma nahegelegt wird.

1.3.2 Lemma

Die Homomorphismen $x_r : \mathbf{G}_a \rightarrow X_r$ können so gewählt werden, dass für alle $r \in \Phi$

$$n_r := x_r(1)x_{-r}(-1)x_r(1) \quad (1.5)$$

in $N(\mathbf{T})$ enthalten ist und unter dem in Abschnitt 1.2 beschriebenen surjektiven Homomorphismus $N(\mathbf{T}) \rightarrow \mathbf{W}$ auf s_r abgebildet wird und dass für alle $u \in \mathbb{F}^\times$ gilt:

$$x_r(u)x_{-r}(-u^{-1})x_r(u) = n_r r^\vee(u). \quad (1.6)$$

Beweis: Analog zum Beweis von Lemma 8.1.4 in Springer [40] (unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $\mathbf{T}$ in (1.3) von rechts auf den Wurzeluntergruppen operiert). ■

Die Eigenschaften aus (1.3) und Lemma 1.3.2 sind in folgender Definition zusammengefasst:

1.3.3 Definition (Realisierung von Wurzelsystemen)

Eine Familie $(x_r)_{r \in \Phi}$ von Isomorphismen algebraischer Gruppen $x_r : \mathbf{G}_a \rightarrow X_r$, die die Eigenschaften aus (1.3) und Lemma 1.3.2 erfüllen, nennen wir eine *Realisierung* des Wurzelsystems Φ in $\mathbf{G}$.

Wir wählen nun auf Φ eine beliebige Totalordnung. Zu jeder Realisierung $(x_r)_{r \in \Phi}$ von Φ in $\mathbf{G}$ gehört dann vermöge Satz 1.3.1 eine Familie von Kommutatorformelkoeffizienten $(c_{r,s;i,j})$. Im nächsten Abschnitt werden wir in dem Fall, dass $\mathbf{G}$ eine halbeinfache algebraische Gruppe von adjungiertem Typ ist, eine Realisierung (x_r) konstruieren, deren zugehörige Koeffizienten $(c_{r,s;i,j})$ relativ leicht berechnet werden können.

1.4 Die Koeffizienten $c_{r,s;i,j}$ für halbeinfache Gruppen von adjungiertem Typ

Die Bezeichnungen aus dem vorigen Abschnitt seien auch in diesem Abschnitt weiter gültig. Wir wollen uns nun mit der expliziten Berechnung der Koeffizienten $c_{r,s;i,j}$ beschäftigen, allerdings zunächst nur für halbeinfache algebraische Gruppen von adjungiertem Typ.

In seinem Tohoku-Artikel [9] hat Chevalley unter anderem eine explizite Konstruktion für halbeinfache algebraische Gruppen von adjungiertem Typ gegeben. Diese Konstruktion liefert eine Parametrisierung der Wurzeluntergruppen, so dass die zugehörigen Kommutatorformelkoeffizienten $c_{r,s;i,j}$ ganzzahlig sind und relativ leicht berechnet werden können. Dies soll nun näher ausgeführt werden. Wir folgen hierzu in weiten Teilen den Ausführungen aus Kapitel 4 in Carters Buch [6].

Wir wollen nun die für uns wesentlichen Teile von Chevalleys Konstruktion halbeinfacher algebraischer Gruppen von adjungiertem Typ skizzieren. Solche Gruppen werden durch Wurzelsysteme klassifiziert (siehe Theorem 32.1 in [28]). Unser Ausgangspunkt sei also ein beliebiges Wurzelsystem Φ in einem $\mathbb{R}$ -Vektorraum V . Wir setzen voraus, dass der $\mathbb{R}$ -Vektorraum V von Φ aufgespannt wird. Wir wollen nun eine halbeinfache algebraische Gruppe $\mathbf{G}$ mit Wurzelsystem Φ über einem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{F}$ der Charakteristik p konstruieren.

Es sei L eine halbeinfache Lie-Algebra über $\mathbb{C}$ mit Wurzelsystem Φ . Wir betten Φ mit Hilfe der Killing-Form in eine Cartan-Unteralgebra H von L ein und fassen die Wurzeln $r \in \Phi$ als Elemente von H auf. Für zwei Wurzeln $r, s \in \Phi$ setzen wir

$$A_{rs} := \frac{2(r, s)}{(r, r)},$$

wobei $(\cdot, \cdot)$ die Killing-Form auf L bedeute. Es ist dann $A_{rs} \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3\}$ für alle Wurzeln $r, s \in \Phi$. Wir wählen in Φ ein Fundamentalsystem $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_l\}$. Setzt man $h_r := \frac{2r}{(r, r)}$ für $r \in \Phi$, so ist jedes h_r eine $\mathbb{Z}$ -Linearkombination der h_r , $r \in \Delta$. Die Lie-Algebra L besitzt dann eine $\mathbb{C}$ -Basis $\{h_r | r \in \Delta\} \cup \{e_r | r \in \Phi\}$, deren Elemente wie folgt miteinander multipliziert werden:

$$\begin{aligned} [h_r, h_s] &= 0 && \text{für alle } r, s \in \Delta, \\ [h_r, e_s] &= A_{rs} e_s && \text{für alle } r \in \Delta \text{ und } s \in \Phi, \\ [e_r, e_{-r}] &= h_r && \text{für alle } r \in \Phi, \\ [e_r, e_s] &= N_{rs} e_{r+s} && \text{für alle } r, s \in \Phi, r \neq -s. \end{aligned}$$

Dabei ist $N_{rs} = 0$, falls $r + s \notin \Phi$ und

$$N_{rs} = \varepsilon_{rs}(m+1) \text{ mit } \varepsilon_{rs} \in \{1, -1\}, \quad (1.7)$$

falls $r + s \in \Phi$. Die nicht-negative ganze Zahl m ist eindeutig festgelegt durch die Bedingung, dass $s - mr \in \Phi$, aber $s - (m+1)r \notin \Phi$ gilt. Man hat nun:

1.4.1 Satz (Identitäten für die Konstanten N_{rs})

Für die wie oben definierten Konstanten N_{rs} gelten die folgenden Identitäten:

- (a) $N_{sr} = -N_{rs}$ für alle $r, s \in \Phi$.
- (b) Für $r_1, r_2, r_3 \in \Phi$ mit $r_1 + r_2 + r_3 = 0$:

$$\frac{N_{r_1, r_2}}{(r_3, r_3)} = \frac{N_{r_2, r_3}}{(r_1, r_1)} = \frac{N_{r_3, r_1}}{(r_2, r_2)}$$

- (c) $N_{rs}N_{-r, -s} = -(m+1)^2$ für $r, s, r+s \in \Phi$ und m wie oben.
- (d) Für $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \Phi$ mit $r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = 0$ und $r_i \neq r_j$ für alle $i \neq j$:

$$\frac{N_{r_1, r_2} N_{r_3, r_4}}{(r_1 + r_2, r_1 + r_2)} + \frac{N_{r_2, r_3} N_{r_1, r_4}}{(r_2 + r_3, r_2 + r_3)} + \frac{N_{r_3, r_1} N_{r_2, r_4}}{(r_3 + r_1, r_3 + r_1)} = 0.$$

Beweis: Siehe Theorem 4.1.2 in Carter [6]. ■

Carter beschreibt in seinem Buch [6] eine Methode, wie die Vorzeichen ε_{rs} der Konstanten N_{rs} gewählt werden können. Diese Methode beruht auf dem Begriff der „extraspeziellen Paare“, der nun eingeführt werden soll.

Zunächst definieren wir auf V eine Totalordnung wie folgt: Es sei V^+ die Menge aller Vektoren $v = \sum_{i=1}^l c_i \delta_i \in V$, bei denen der erste von Null verschiedene Koeffizient c_i positiv ist. Wir schreiben dann $v > w$ für $v, w \in V$, falls $v - w \in V^+$ ist.

1.4.2 Definition (spezielle und extraspezielle Paare von Wurzeln)

Mit den Bezeichnungen wie oben heiße ein geordnetes Paar (r, s) von Wurzeln *speziell*, wenn $r + s \in \Phi$ und $0 < r < s$ gilt. Ein spezielles Paar (r, s) heißt *extraspeziell*, wenn für alle speziellen Paare (r_1, s_1) mit $r_1 + s_1 = r + s$ folgt, dass $r \leq r_1$ ist.

1.4.3 Bemerkung

Die extraspeziellen Paare stehen in Bijektion zu den positiven, nicht-einfachen Wurzeln in Φ vermöge: $(r, s) \mapsto r + s$.

Carter beschreibt auf den Seiten 58 und 59 seines Buches [6], dass man die Vorzeichen ε_{rs} für alle extraspeziellen Paare (r, s) beliebig wählen kann und dass die Vorzeichen ε_{rs} für die übrigen Paare $(r, s) \in \Phi \times \Phi$ mit $r + s \in \Phi$ bereits eindeutig bestimmt sind. Carter führt a.a.O. auch aus, wie man die restlichen Vorzeichen aus den Vorzeichen auf den extraspeziellen Paaren mit den in Satz 1.4.1 angegebenen Relationen rekursiv berechnen kann. Wir können also von nun an die Konstanten N_{rs} für $r, s \in \Phi$ als bekannt voraussetzen. Wir fahren nun weiter fort in der Beschreibung der Konstruktion der halbeinfachen algebraischen Gruppe von adjungiertem Typ.

Es sei $L_{\mathbb{Z}}$ die Teilmenge von L , die aus den $\mathbb{Z}$ -Linearkombinationen der h_r ($r \in \Delta$) und e_r ($r \in \Phi$) besteht. Da sämtliche Strukturkonstanten von L bezüglich der Basis $\{h_r | r \in \Delta\} \cup \{e_r | r \in \Phi\}$ ganze Zahlen sind, wird $L_{\mathbb{Z}}$ in natürlicher Weise eine Lie-Algebra über $\mathbb{Z}$. Somit wird $L_{\mathbb{F}} := L_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}$ in natürlicher Weise eine Lie-Algebra über $\mathbb{F}$, deren Strukturkonstanten die Strukturkonstanten von L , modulo p genommen, sind. Für $r \in \Phi$ und $c \in \mathbb{C}$ ist $\exp(c \cdot \text{ad}(e_r))$ ein Automorphismus von L . Daraus lässt sich ein Automorphismus $x_r(t)$ von $L_{\mathbb{F}}$ konstruieren. Definiert man dann $\mathbf{G}$ als das Erzeugnis der Automorphismen $x_r(t)$, $r \in \Phi$, $t \in \mathbb{F}$, so ist $\mathbf{G}$ eine halbeinfache algebraische Gruppe von adjungiertem Typ mit Wurzelsystem Φ . Die Wurzeluntergruppen von $\mathbf{G}$ sind gegeben durch $X_r = \langle x_r(t) | t \in \mathbb{F} \rangle$. Die Abbildungen $x_r : \mathbf{G}_a \rightarrow X_r$ bilden eine Realisierung (x_r) von Φ in $\mathbf{G}$ (vgl. Theorem 7.2.2 und die Bemerkungen auf Seite 100 in Carters Buch [6]).

Die Kommutatorformelkoeffizienten bezüglich dieser Realisierung lassen sich nun berechnen. Hierzu seien $r, s \in \Phi$, $r \neq \pm s$. Es sei $-mr + s, \dots, nr + s$ die r -Kette durch s . Für $i = 1, \dots, n$ setzen wir (vergleiche Carter [6], Seite 61):

$$M_{r,s,i} := \frac{1}{i!} N_{r,s} N_{r,r+s} \cdots N_{r,(i-1)r+s}. \quad (1.8)$$

Die oben eingeführte Totalordnung auf V induziert eine Totalordnung auf Φ . Für die Kommutatorformelkoeffizienten von $\mathbf{G}$ bezüglich dieser Totalordnung auf Φ und der oben beschriebenen Realisierung (x_r) gilt:

$$\begin{aligned} c_{r,s;i,1} &= M_{rsi} \\ c_{r,s;1,j} &= -M_{srj} \\ c_{r,s;3,2} &= -\frac{1}{3} M_{r+s,r,2} \\ c_{r,s;2,3} &= -\frac{2}{3} M_{s+r,s,2}. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Diese Formeln folgen aus dem Beweis von Theorem 5.2.2 in Carters Buch [6]. Damit haben wir eine Methode, um die Kommutatorformelkoeffizienten für halbeinfache algebraische Gruppen von adjungiertem Typ zu berechnen (bezüglich einer geeigneten Realisierung des Wurzelsystems). Im nächsten Abschnitt wird es darum gehen, diese Ergebnisse auf zusammenhängende reduktive (nicht notwendigerweise halbeinfache) Gruppen zu übertragen.

1.5 Die Koeffizienten $c_{r,s;i,j}$ im allgemeinen Fall

Wir kehren wieder zu den Bezeichnungen aus Abschnitt 1.3 zurück. Insbesondere sei also $\mathbf{G}$ wieder eine zusammenhängende reduktive (nicht notwendigerweise halbeinfache) Gruppe mit maximalem Torus $\mathbf{T}$ und Wurzeldatum $\Psi(\mathbf{G}, \mathbf{T}) = (X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$.

Zur weiteren Untersuchung der Koeffizienten $c_{r,s;i,j}$ aus der Kommutatorformel (1.4) wollen wir uns noch etwas genauer mit Realisierungen des Wurzelsystems Φ in $\mathbf{G}$ beschäftigen.

Es sei I die Menge aller Quadrupel (r, s, i, j) mit $r, s \in \Phi$, $r \neq \pm s$ sowie $i, j \in \mathbb{N}$ mit $ir + js \in \Phi$. Es sei weiter M definiert als die Menge aller Familien $(c_{r,s;i,j})_{(r,s,i,j) \in I}$ von Elementen aus $\mathbb{F}$. Wir nennen zwei Familien $(c_{r,s;i,j})$ und $(c'_{r,s;i,j})$ aus M *äquivalent*, wenn eine Familie von Konstanten $(c_r)_{r \in \Phi}$ aus $\mathbb{F}^\times$ existiert, so dass

$$c'_{r,s;i,j} = c_r^{-i} c_s^{-j} c_{ir+js} c_{r,s;i,j}$$

für alle $(r, s, i, j) \in I$ gilt (vergleiche Springer [40], Seite 156). Hierdurch ist auf M eine Äquivalenzrelation gegeben.

Auf Φ wählen wir nun eine beliebige Totalordnung und behalten diese für den Rest dieses Abschnitts bei. Zu jeder Realisierung $(x_r)_{r \in \Phi}$ von Φ in $\mathbf{G}$ gehört dann vermöge Satz 1.3.1 eine Familie von Kommutatorformelkoeffizienten $(c_{r,s;i,j})_{(r,s,i,j) \in I}$. Es gilt:

1.5.1 Lemma

Es sei $(x_r)_{r \in \Phi}$ eine Realisierung von Φ in $\mathbf{G}$ und $(c_{r,s;i,j})$ die zugehörige Familie von Koeffizienten in der Kommutatorformel (1.4). Genau dann tritt eine Familie $(c'_{r,s;i,j}) \in M$ als Familie von Koeffizienten in der Kommutatorformel (1.4) zu einer (möglicherweise anderen) Realisierung von Φ in $\mathbf{G}$ auf, wenn die Familien $(c_{r,s;i,j})$ und $(c'_{r,s;i,j})$ äquivalent sind.

Beweis: Dies folgt aus Lemma 8.1.4 und Proposition 8.2.1 in Springer [40]. ■

Mit anderen Worten: Zu jeder zusammenhängenden reduktiven Gruppe mit Wurzeldatum $(X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$ gehört bei vorgegebener Totalordnung auf Φ bis auf Äquivalenz genau eine Familie von Kommutatorformelkoeffizienten $(c_{r,s;i,j})$.

Der folgende Satz wird es ermöglichen, die Berechnung der Koeffizienten $(c_{r,s;i,j})$ auf die Berechnung der Kommutatorformelkoeffizienten halbeinfacher Gruppen von adjungiertem Typ zurückzuführen. Zu seiner Formulierung wollen wir noch einmal in Erinnerung rufen, dass bei einem Wurzeldatum $(X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$ stets Φ ein Wurzelsystem in $Q \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ ist, wobei mit Q der von Φ erzeugte $\mathbb{Z}$ -Untermodul von X gemeint ist (vgl. Abschnitt 1.2). Ist $\mathbf{G}$ eine zusammenhängende reduktive lineare algebraische Gruppe mit Wurzeldatum $\Psi(\mathbf{G}) := (X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$ und Q der von Φ erzeugte $\mathbb{Z}$ -Untermodul in X , so folgt aus Corollary 8.1.9 und dem Beweis von Theorem 10.1.1 in Springer [40], dass dann ein Wurzeldatum der Form $\Psi' := (Q, \Phi, Y', \Phi'^\vee)$ existiert. Nach dem Klassifikationssatz für zusammenhängende reduktive Gruppen existiert dann eine zusammenhängende reduktive Gruppe $\mathbf{H}$ mit Wurzeldatum Ψ' . Es gilt:

1.5.2 Satz

Es seien $\mathbf{G}$ und $\mathbf{H}$ zusammenhängende reduktive Gruppen mit Wurzeldaten $(X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$ bzw. $(Q, \Phi, Y', \Phi'^\vee)$, wobei Q der von Φ erzeugte $\mathbb{Z}$ -Untermodul von X sei. In $\mathbf{G}$ und $\mathbf{H}$ seien Realisierungen von Φ gewählt, und es seien $(c_{r,s;i,j})$ bzw. $(c'_{r,s;i,j})$ die zugehörigen Familien von Kommutatorformelkoeffizienten. Dann sind $(c_{r,s;i,j})$ und $(c'_{r,s;i,j})$ äquivalent.

Beweis: Dies folgt aus Theorem 9.5.4 in Springer [40]. ■

Satz 1.5.2 ermöglicht nun die schon angesprochene Reduktion der Berechnung der $c_{r,s;i,j}$ auf die entsprechende Berechnung bei halbeinfachen Gruppen von adjungiertem Typ in der folgenden Weise: Es sei $\mathbf{G}$ eine zusammenhängende reduktive Gruppe mit Wurzeldatum $\Psi(\mathbf{G}) := (X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$. Es sei ferner Q der von Φ erzeugte $\mathbb{Z}$ -Untermodul in X . Wie in den Anmerkungen vor Satz 1.5.2 erläutert, existiert dann eine zusammenhängende reduktive Gruppe $\mathbf{H}$ mit einem Wurzeldatum der Form $\Psi' := (Q, \Phi, Y', \Phi'^\vee)$. Wegen $Q = \mathbb{Z}\Phi$ ist $\mathbf{H}$ halbeinfach von adjungiertem Typ. Aus Satz 1.5.2 und Lemma 1.5.1 folgt nun, dass es eine Realisierung von Φ in $\mathbf{G}$ und eine Realisierung von Φ in $\mathbf{H}$ gibt, so dass die zugehörigen Familien von Kommutatorformelkoeffizienten übereinstimmen. Hiermit ist die Berechnung der Koeffizienten $(c_{r,s;i,j})$ einer zusammenhängenden reduktiven Gruppe auf die entsprechende Frage bei halbeinfachen Gruppen von adjungiertem Typ reduziert.

Damit haben wir nun einen Algorithmus, mit Hilfe dessen wir die Kommutatorformelkoeffizienten (bezüglich einer geeigneten Parametrisierung der Wurzeluntergruppen) berechnen können. Dieser soll im nächsten Abschnitt noch einmal kurz zusammengefasst und seine Bedeutung für das Rechnen in U besprochen werden.

1.6 Ein Algorithmus zum Rechnen in $\mathbf{U}$

Mit den in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten Methoden haben wir nun fast alle Werkzeuge in der Hand, um in der unipotenten Untergruppe $\mathbf{U}$ rechnen zu können. Wir behalten die Bezeichnungen aus den vorigen Abschnitten bei. Es sei also insbesondere $\mathbf{G}$ eine zusammenhängende reduktive Gruppe mit maximalem Torus $\mathbf{T}$ und Wurzeldatum $\Psi(\mathbf{G}, \mathbf{T}) = (X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$. Es sei $\mathbf{B}$ eine Boreluntergruppe von $\mathbf{G}$, die $\mathbf{T}$ enthält und die wir wieder in ein semidirektes Produkt $\mathbf{B} = \mathbf{T} \ltimes \mathbf{U}$ zerlegen. Wir hatten bereits in Abschnitt 1.2 gesehen, dass diejenigen Wurzeln des Wurzelsystems Φ , deren zugehörige Wurzeluntergruppen in $\mathbf{U}$ enthalten sind, ein System positiver Wurzeln in Φ bilden. Wir gehen davon aus, dass das Wurzeldatum Ψ von $\mathbf{G}$ durch folgende Informationen gegeben ist:

- ein Fundamentalsystem $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_l\}$ von Φ . Die einfachen Wurzeln δ_i für $i = 1, \dots, l$ seien als $\mathbb{Z}$ -Linearkombinationen einer Basis $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ von X gegeben.
- ein Fundamentalsystem $\Delta^\vee = \{\delta_1^\vee, \dots, \delta_l^\vee\}$ von $\Phi^\vee$. Die einfachen Kowurzeln $\delta_i^\vee$ für $i = 1, \dots, l$ seien als $\mathbb{Z}$ -Linearkombinationen einer zur Basis $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ dualen Basis $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ von Y gegeben.

Aus diesen Angaben lassen sich dann die Zahlen $\langle \delta_i, \delta_j^\vee \rangle$ für $i, j = 1, \dots, l$ bestimmen, mit Hilfe derer man alle Wurzeln aus Φ und alle Kowurzeln aus $\Phi^\vee$ berechnen kann (ein entsprechender Algorithmus wird beispielsweise auf Seite 56 in Humphreys [26] beschrieben).

Wir versehen das Wurzelsystem Φ mit der auf Seite 20 beschriebenen Totalordnung bezüglich des Fundamentalsystems Δ . Es sei $\Phi^+ = \{r_1, \dots, r_m\}$ das zu Δ gehörige System von positiven Wurzeln, und es gelte $r_1 < \dots < r_m$ bezüglich der soeben definierten Totalordnung. Es gilt:

1.6.1 Satz

Die Abbildung $\phi : \mathbf{G}_a^m \rightarrow \mathbf{U}$ mit

$$\phi(t_1, \dots, t_m) := x_{r_1}(t_1)x_{r_2}(t_2) \cdots x_{r_m}(t_m)$$

ist ein Isomorphismus von Varietäten.

Beweis: Siehe Proposition 8.2.1 in Springer [40]. ■

Wir wollen nun die zum Rechnen in $\mathbf{U}$ notwendigen Schritte noch einmal kurz zusammenfassen. Zunächst bestimmen wir in einer einmaligen Rechnung die Kommutatorkoeffizienten bezüglich einer geeigneten Parametrisierung der Wurzeluntergruppen:

- [1] Berechne die extraspeziellen Paare wie folgt: r durchlaufe die nicht-einfachen, positiven Wurzeln von Φ . Bestimme nun die (bezüglich der gewählten Totalordnung) kleinste

positive Wurzel s , so dass $r - s \in \Phi^+$ ist. Dann ist $(s, r - s)$ das zu r gehörige extraspezielle Paar im Sinne von Bemerkung 1.4.3.

- [2] Wähle für alle extraspeziellen Paare (r, s) die Vorzeichen $\varepsilon_{rs} \in \{1, -1\}$ der Konstanten $N_{r,s}$ beliebig. Setze dann für diese Wurzelpaare $N_{r,s}$ wie in Formel (1.7).
- [3] Berechne die Konstanten $N_{r,s}$ für die restlichen Wurzelpaare $(r, s) \in \Phi \times \Phi$ mit $r \neq \pm s$ rekursiv mittels Satz 1.4.1.
- [4] Berechne dann für alle $(r, s, i, j) \in I$ die Kommutatorformelkoeffizienten $c_{r,s;i,j}$ mit den Formeln (1.8) und (1.9).

Nach Satz 1.6.1 lässt sich jedes Element x aus $\mathbf{U}$ eindeutig schreiben in der Form

$$x = x_{r_1}(t_1)x_{r_2}(t_2) \cdots x_{r_m}(t_m), \quad (1.10)$$

und umgekehrt ist jedes Element dieser Gestalt in $\mathbf{U}$. Wir wollen (1.10) auch als die *Normalform* von x bezeichnen. Die Kommutatorrelationen Satz 1.3.1 ermöglichen es, das Produkt zweier beliebiger Elemente

$$x = x_{r_1}(t_1)x_{r_2}(t_2) \cdots x_{r_m}(t_m) \text{ und } y = x_{r'_1}(t'_1)x_{r'_2}(t'_2) \cdots x_{r'_m}(t'_m)$$

aus $\mathbf{U}$ wieder in die Normalform (1.10) zu bringen. Als effizienteste Methode hat sich hierbei die „Collection from the left“ erwiesen, wie sie auf Seite 401ff in Sims [38] beschrieben ist.

Wir invertieren ein Element

$$x = x_{r_1}(t_1)x_{r_2}(t_2) \cdots x_{r_m}(t_m),$$

indem wir sein Inverses in der Form

$$x^{-1} = x_{r_m}(-t_m) \cdots x_{r_2}(-t_2)x_{r_1}(-t_1)$$

schreiben und dann eine „Collection from the left“ durchführen.

Häufig ist es von Nutzen, ein Element $x \in \mathbf{U}$ mit Hilfe der Kommutatorrelationen Satz 1.3.1 in eine Gestalt

$$x = x_{r'_1}(t'_1)x_{r'_2}(t'_2) \cdots x_{r'_m}(t'_m)$$

zu überführen, bei der die $r'_1, \dots, r'_m$ paarweise verschiedene positive Wurzeln sind, für die aber nicht notwendigerweise $r'_1 < \dots < r'_m$ gilt (es handelt sich also im Allgemeinen *nicht* um die Normalform von x). In Abschnitt 1.9 wird für uns die Situation von Interesse sein, die in der folgenden Bemerkung 1.6.2 behandelt wird. Eine Teilmenge $\Phi' \subseteq \Phi$ nennen wir *abgeschlossen*, wenn gilt: Aus $r, s \in \Phi'$ und $r + s \in \Phi$ folgt, dass auch $r + s \in \Phi'$ ist.

1.6.2 Bemerkung

Es sei Φ^+ die disjunkte Vereinigung zweier abgeschlossener Teilmengen $\Psi_1, \Psi_2 \subseteq \Phi^+$. Dann lässt sich jedes $x \in \mathbf{U}$ mit Hilfe der Kommutatorrelationen Satz 1.3.1 in endlich vielen Schritten auf die Form

$$x = \prod_{r \in \Psi_1} x_r(t_r) \cdot \prod_{r \in \Psi_2} x_r(t_r)$$

bringen. Hierbei sind die beiden Produkte aufsteigend bezüglich der oben beschriebenen Totalordnung auf Φ angeordnet.

Beweis: Es sei $x = x_{s_1}(t_1)x_{s_2}(t_2)\cdots x_{s_k}(t_k) \in \mathbf{U}$ für ein $k \in \mathbb{N}$, $s_1, \dots, s_k \in \Phi^+$ und $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{F}$. Wir definieren $M' := \max\{\text{Höhe}(r) \mid r \in \Psi_1\}$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass $\{s_1, s_2, \dots, s_k\} \cap \Psi_1$ nichtleer ist (denn sonst wäre die Normalform von x bereits eine Darstellung von x in der gesuchten Form, da auf Grund der Abgeschlossenheit von Ψ_2 bei der Überführung von x in die Normalform mit Hilfe der Kommutatorrelationen (1.4) nur zusätzliche Terme der Form $x_r(t)$ mit $r \in \Psi_2$ entstehen). Wir definieren weiter $m' := \min\{\text{Höhe}(r) \mid r \in \{s_1, \dots, s_k\} \cap \Psi_1\}$. Wir führen den Beweis durch vollständige (Abwärts-)Induktion nach m' .

Induktionsanfang $m' = M'$: Es genügt, den Fall $s_1, \dots, s_{k-1} \in \Psi_2$ und $s_k \in \Psi_1$ zu betrachten (da Ψ_1 und Ψ_2 abgeschlossen sind). Es gilt also $\text{Höhe}(s_k) = M'$. Durch sukzessive Anwendung der Kommutatorrelationen Satz 1.3.1 schiebt man $x_{s_k}(t_k)$ ganz nach links und erhält dann

$$x = x_{s_k}(t_k) \cdot x_{s'_1}(t'_1)x_{s'_2}(t'_2)x_{s'_{k'}}(t'_{k'}).$$

Es gilt $s'_1, s'_2, \dots, s'_{k'} \in \Psi_2$ (da die s'_i , die durch die Kommutatorrelationen neu hinzugefügt wurden, alle eine Höhe strikt größer als $\text{Höhe}(s_k) = M'$ haben). Wir können $x_{s'_1}(t'_1)x_{s'_2}(t'_2)x_{s'_{k'}}(t'_{k'})$ durch „Collection from the left“ auf Normalform bringen, die wegen der Abgeschlossenheit von Ψ_2 in $\prod_{r \in \Psi_2} X_r$ enthalten ist. Damit haben wir eine Darstellung von x der gesuchten Art konstruiert.

Induktionsschritt von $m' + 1$ auf m' : Es genügt auch hier, den Fall $s_1, \dots, s_{k-1} \in \Psi_2$ und $s_k \in \Psi_1$ zu betrachten. Durch sukzessive Anwendung der Kommutatorrelationen Satz 1.3.1 schiebt man $x_{s_k}(t_k)$ ganz nach links und erhält dann

$$x = x_{s_k}(t_k) \cdot x_{s'_1}(t'_1)x_{s'_2}(t'_2)x_{s'_{k'}}(t'_{k'}).$$

Jede der positiven Wurzeln $s'_1, s'_2, \dots, s'_{k'}$ ist in Ψ_2 oder hat eine strikt größere Höhe als $\text{Höhe}(s_k) = m'$. Wir können also auf $x_{s'_1}(t'_1)x_{s'_2}(t'_2)x_{s'_{k'}}(t'_{k'})$ die Induktionsvoraussetzung anwenden und erhalten damit eine Darstellung von x der Form $x = yz$, wobei y ein Produkt von $x_r(t_r)$ mit $r \in \Psi_1$ und z ein Produkt von $x_r(t_r)$ mit $r \in \Psi_2$ ist. Durch „Collection from the left“ können wir x und y jeweils auf Normalform bringen, die wegen der Abgeschlossenheit von Ψ_1 und Ψ_2 wieder in $\prod_{r \in \Psi_1} X_r$ bzw. $\prod_{r \in \Psi_2} X_r$ enthalten ist. Damit haben wir eine Darstellung von x der gesuchten Art konstruiert. $\blacksquare$

Man beachte, dass der Beweis von Bemerkung 1.6.2 konstruktiv ist. In Abschnitt 1.9 werden wir auf Bemerkung 1.6.2 in den folgenden beiden Spezialfällen zurückgreifen:

- $\Psi_1 = \{r\}$, $\Psi_2 = \Phi^+ - \{r\}$, wobei $r \in \Phi^+$ eine einfache Wurzel ist,
- $\Psi_1 = \{r \in \Phi^+ \mid rw \text{ ist negative Wurzel}\}$, $\Psi_2 = \{r \in \Phi^+ \mid rw \text{ ist positive Wurzel}\}$, wobei $w \in \mathbf{W}$ ein Weylgruppenelement ist.

1.6.3 Bemerkung

Algorithmen zur Berechnung der Strukturkonstanten $N_{r,s}$ und der Kommutatorformelkoeffizienten $c_{r,s;i,j}$ sowie zum Rechnen in der unipotenten Untergruppe $\mathbf{U}$ wurden von Frank Lübeck, Christoph Köhler und mir selbst basierend auf dem Softwarepaket CHEVIE [21] des Computeralgebrasystems GAP [36] implementiert. Algorithmen zur effizienten Berechnung der Konstanten $N_{r,s}$ in den Computeralgebrasystemen GAP [18] und Magma [2] wurden unabhängig von der vorliegenden Arbeit von Willem de Graaf implementiert. Eine GAP-Implementation eines Algorithmus' zum Rechnen in unipotenten Untergruppen von Chevalley-Gruppen wurde – ebenfalls unabhängig von der vorliegenden Arbeit – von Sergei Haller in GAP vorgenommen, siehe [23].

1.7 Eine Präsentation

Es sei auch in diesem Abschnitt $\mathbf{G}$ eine zusammenhängende reduktive Gruppe mit maximalem Torus $\mathbf{T}$ und Wurzeldatum $\Psi(\mathbf{G}, \mathbf{T}) = (X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$. Wir wollen nun eine Präsentation angeben, die uns das Rechnen in $\mathbf{G}$ ermöglicht. Diese Präsentation orientiert sich an der in Section 9.4 in Springers Buch [40] beschriebenen.

Zunächst wählen wir in Φ ein System Φ^+ von positiven Wurzeln, und es sei Δ ein zugehöriges Fundamentalsystem von Φ . Mit Hilfe des Fundamentalsystems Δ versehen wir Φ mit einer Totalordnung wie auf Seite 20 beschrieben. Wir wählen eine Realisierung (x_r) von Φ in $\mathbf{G}$, so dass die zugehörigen Kommutatorformelkoeffizienten $(c_{r,s;i,j})$ bezüglich der soeben definierten Totalordnung auf Φ den Formeln (1.8) und (1.9) genügen. Die Existenz einer solchen Realisierung wurde in den Abschnitten 1.4 und 1.5 bewiesen. Wir können sämtliche Konstanten N_{rs} sowie ε_{rs} , wie sie in Abschnitt 1.4 eingeführt wurden, für $r, s \in \Phi$ mit $r \neq \pm s$, als bekannt voraussetzen.

Für Wurzeln $r, s \in \Phi$ mit $r \neq \pm s$ setzen wir

$$\eta_{rs} := (-1)^m \frac{\varepsilon_{r,-mr+s} \cdots \varepsilon_{r,-r+s}}{\varepsilon_{r,-mr+s} \cdots \varepsilon_{r,(n-m-1)r+s}},$$

wobei m und n durch die r -Kette

$$-mr + s, \dots, nr + s$$

durch s gegeben seien (vergleiche Carter [6], Seite 95). Für $r, s \in \Phi$ mit $r = \pm s$ sei

$$\eta_{rs} := -1.$$

Wir können nun mit der Beschreibung einer Präsentation von $\mathbf{G}$ beginnen. Wir definieren $\tilde{\mathbf{T}}$ als die Gruppe $\text{Hom}(X, \mathbb{F}^\times)$ aller Homomorphismen von abelschen Gruppen von X nach $\mathbb{F}^\times$. Es gibt dann einen Isomorphismus $\pi : \tilde{\mathbf{T}} \rightarrow \mathbf{T}$ von abelschen Gruppen mit der Eigenschaft: $\chi(\pi(\tilde{h})) = \tilde{h}(\chi)$ für alle $\chi \in X$ und $\tilde{h} \in \tilde{\mathbf{T}}$. Das Inverse $\pi^{-1} : \mathbf{T} \rightarrow \tilde{\mathbf{T}}$ ist durch $(\pi^{-1}(h))(\chi) = \chi(h)$ für alle $h \in \mathbf{T}$ und $\chi \in X$ gegeben. Für $\chi \in X$ definieren wir einen Homomorphismus $\bar{\chi} : \tilde{\mathbf{T}} \rightarrow \mathbb{F}^\times$ durch $\bar{\chi}(\tilde{h}) := \tilde{h}(\chi)$. Für $\gamma \in Y$ definieren wir einen Homomorphismus $\bar{\gamma} : \mathbb{F}^\times \rightarrow \tilde{\mathbf{T}}$ durch $\bar{\gamma}(\rho)(\chi) := \rho^{\langle \chi, \gamma \rangle}$ für $\rho \in \mathbb{F}^\times$ und $\chi \in X$.

Als Erzeuger unserer Präsentation wählen wir die Elemente $\tilde{h} \in \tilde{\mathbf{T}}$ sowie Symbole $\tilde{x}_r(u)$ für $r \in \Phi$ und $u \in \mathbb{F}$. Für $r \in \Phi$ setzen wir noch:

$$\tilde{n}_r := \tilde{x}_r(1)\tilde{x}_{-r}(-1)\tilde{x}_r(1).$$

Wir verlangen die folgenden Relationen:

(a) Für alle $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2 \in \tilde{\mathbf{T}}$ gelte:

$$\tilde{h}_1 \tilde{h}_2 = \tilde{h}_1 \cdot \tilde{h}_2, \quad (1.11)$$

wobei mit dem Produkt auf der rechten Seite der Gleichung die Multiplikation in $\text{Hom}(X, \mathbb{F}^\times)$ gemeint ist.

(b) Für alle $r \in \Phi$ und $u, v \in \mathbb{F}$ gelte:

$$\tilde{x}_r(u) \tilde{x}_r(v) = \tilde{x}_r(u + v). \quad (1.12)$$

(c) Für alle $r, s \in \Phi$ mit $r \neq \pm s$ und $t, u \in \mathbb{F}$ gelte:

$$[\tilde{x}_s(u), \tilde{x}_r(t)] = \prod_{i,j>0} \tilde{x}_{ir+js}(c_{r,s;i,j} t^i u^j). \quad (1.13)$$

(d) Für alle $\tilde{h} \in \tilde{\mathbf{T}}$, $r \in \Phi$ und $u \in \mathbb{F}$ gelte:

$$\tilde{h}^{-1} \tilde{x}_r(u) \tilde{h} = \tilde{x}_{\bar{r}(\tilde{h})}(u). \quad (1.14)$$

(e) Für $r_1, r_2 \in \Phi$ und $u \in \mathbb{F}$ gelte:

$$\tilde{n}_{r_1}^{-1} \tilde{x}_{r_2}(u) \tilde{n}_{r_1} = \tilde{x}_{s_{r_1}(r_2)}(\eta_{r_1, r_2} u). \quad (1.15)$$

(f) Für alle $r \in \Phi$ gelte:

$$\tilde{n}_r^2 = \tilde{h}_r \text{ und } \tilde{n}_r^{-1} = \tilde{n}_{-r}, \quad (1.16)$$

wobei $\tilde{h}_r \in \tilde{\mathbf{T}}$ durch

$$\tilde{h}_r(\chi) := (-1)^{\langle \chi, r^\vee \rangle}$$

für alle $\chi \in X$ definiert sei.

(g) Für alle $r_1, r_2 \in \Delta$ mit $r_1 \neq r_2$ gelte:

$$\tilde{n}_{r_1} \tilde{n}_{r_2} \tilde{n}_{r_1} \cdots = \tilde{n}_{r_2} \tilde{n}_{r_1} \tilde{n}_{r_2} \cdots, \quad (1.17)$$

wobei die Anzahl der Faktoren auf jeder Seite gleich der Ordnung von $s_{r_1} s_{r_2}$ in W sei.

(h) Für $r \in \Phi$ und $u \in \mathbb{F}^\times$ gelte:

$$\tilde{x}_r(u) \tilde{x}_{-r}(-u^{-1}) \tilde{x}_r(u) = \tilde{n}_r \overline{r^\vee}(u). \quad (1.18)$$

Es sei $\tilde{\mathbf{G}}$ die Gruppe, die durch die Präsentation mit den oben genannten Erzeugern und den Relationen (a) bis (h) gegeben ist. Dann gilt:

1.7.1 Satz

Der Isomorphismus $\pi : \tilde{\mathbf{T}} \rightarrow \mathbf{T}$ setzt zu einem Isomorphismus abstrakter Gruppen

$$\pi : \tilde{\mathbf{G}} \rightarrow \mathbf{G}$$

mit der Eigenschaft $\pi(\tilde{x}_r(u)) = x_r(u)$ für alle $r \in \Phi$ und $u \in \mathbb{F}$ fort.

Beweis: Der Beweis erfolgt analog zum Beweis von Theorem 9.4.3 in Springer [40]. ■

Wir wollen noch eine Folgerung aus den Relationen ziehen: Wie man durch Nachrechnen unter Benutzung der Relationen (1.14) und (1.18) bestätigt, ist für alle $\tilde{h} \in \tilde{\mathbf{T}}$ stets $\tilde{n}_r^{-1} \tilde{h} \tilde{n}_r$ in $\tilde{\mathbf{T}}$ enthalten, und es gilt

$$\tilde{n}_r^{-1} \tilde{h} \tilde{n}_r(\chi) = \tilde{h}(\chi^{s_r}) \quad (1.19)$$

für alle $\chi \in X$.

1.8 Die Bruhat–Zerlegung

In diesem Abschnitt wollen wir eine Normalform, die Bruhat–Zerlegung, für die Elemente einer zusammenhängenden reduktiven Gruppe beschreiben. Es sei wieder $\mathbf{G}$ eine zusammenhängende reduktive lineare algebraische Gruppe über dem algebraisch abgeschlossenen

Körper $\mathbb{F}$ mit maximalem Torus $\mathbf{T}$ und Wurzeldatum $\Psi := \Psi(\mathbf{G}, \mathbf{T}) = (X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$. Wir wählen für $\mathbf{G}$ eine Präsentation wie im vorigen Abschnitt beschrieben. Wir übernehmen die Bezeichnungen aus dem vorigen Abschnitt, allerdings identifizieren wir auf Grund der Existenz des Isomorphismus' π aus Satz 1.7.1 im Folgenden $\tilde{\mathbf{T}}$ mit $\mathbf{T}$, $\tilde{x}_r(u)$ mit $x_r(u)$, $\tilde{n}_r$ mit n_r etc. Bevor wir die Bruhat-Zerlegung beschreiben können, wollen wir noch einige Begriffe einführen:

Es sei w ein Element aus der Weylgruppe W von $\mathbf{G}$. Sind $p_1, \dots, p_k$ die positiven Wurzeln aus Φ , die von w auf negative Wurzeln abgebildet werden, so schreiben wir:

$$U_w := X_{p_1} \cdots X_{p_k}. \quad (1.20)$$

Mittels Satz 1.3.1 kann man zeigen, dass U_w nicht von der Wahl der Reihenfolge der p_i abhängt (siehe Carter [6], S. 114). Wir schreiben w als reduziertes Produkt $w = s_{r_1} \cdots s_{r_k}$ von Fundamentalspiegelungen $s_{r_1}, \dots, s_{r_k}$ mit $r_1, \dots, r_k \in \Delta$. Wir setzen nun

$$\dot{w} := n_{r_1} \cdots n_{r_k}. \quad (1.21)$$

Aus den Relationen (g) und dem Satz von Matsumoto (siehe beispielsweise Proposition 8.3.3 in [40]) folgt dann, dass die Definition von $\dot{w}$ unabhängig von der Wahl des reduzierten Ausdrucks $w = s_{r_1} \cdots s_{r_k}$ ist. Wir nennen $\dot{w}$ den *Standardvertreter* von w . Wir nennen die Anzahl k der Fundamentalspiegelungen in dem reduzierten Produkt $w = s_{r_1} \cdots s_{r_k}$ die *Länge* $l(w)$ von w . Nun können wir die schon oben erwähnte Normalform für Elemente in $\mathbf{G}$ beschreiben:

1.8.1 Satz (Bruhat-Zerlegung)

Jedes Element x aus $\mathbf{G}$ lässt sich in eindeutiger Weise schreiben als

$$x = u' \dot{w} h u \quad (1.22)$$

mit $u \in \mathbf{U}$, $h \in \mathbf{T}$, $w \in W$ und $u' \in \mathbf{U}_w$.

Beweis: Siehe Theorem 2.5.14 in Carter [7] ■

Ein auf der Bruhat-Zerlegung basierender Algorithmus zum Rechnen in der Gruppe $\mathbf{G}$ soll im nächsten Abschnitt detaillierter beschrieben werden.

1.9 Ein Algorithmus zum Rechnen in reduktiven Gruppen

In diesem Abschnitt wird ein Algorithmus zum Rechnen in zusammenhängenden reduktiven linearen algebraischen Gruppen über algebraisch abgeschlossenen Körpern vorgestellt. Im weiteren Verlauf werden nur Berechnungen in halbeinfachen algebraischen Gruppen von

adjungiertem Typ benötigt. Dennoch erscheint es sinnvoll, gleich das Rechnen in nicht-halbeinfachen reduktiven Gruppen mitzubehandeln, da die Präsentation aus Abschnitt 1.7 dies ohne größeren Mehraufwand hergibt.

Wir behalten die Bezeichnungen aus dem vorigen Abschnitt bei. Es sei also weiterhin $\mathbf{G}$ eine zusammenhängende reduktive lineare algebraische Gruppe über dem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{F}$ mit maximalem Torus $\mathbf{T}$ und Wurzeldatum $\Psi := \Psi(\mathbf{G}, \mathbf{T}) = (X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$. Wir identifizieren wieder $\tilde{\mathbf{T}}$ mit $\mathbf{T}$, $\tilde{x}_r(u)$ mit $x_r(u)$, $\tilde{n}_r$ mit n_r etc. Satz 1.8.1 bietet nicht nur eine Möglichkeit, Elemente von $\mathbf{G}$ zu vergleichen, sondern er legt auch Datenstrukturen zur Speicherung von Elementen aus $\mathbf{G}$ nahe. Diese wollen wir nun eingehender beschreiben:

Wir gehen dabei wieder davon aus, dass das Wurzeldatum Ψ von $\mathbf{G}$ durch folgende Angaben gegeben ist:

- ein Fundamentalsystem $\Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_l\}$ von Φ . Die einfachen Wurzeln δ_i für $i = 1, \dots, l$ seien als $\mathbb{Z}$ -Linearkombinationen einer Basis $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ von X gegeben.
- ein Fundamentalsystem $\Delta^\vee = \{\delta_1^\vee, \dots, \delta_l^\vee\}$ von $\Phi^\vee$. Die einfachen Kowurzeln $\delta_i^\vee$ für $i = 1, \dots, l$ seien als $\mathbb{Z}$ -Linearkombinationen einer zur Basis $\{\chi_1, \dots, \chi_n\}$ dualen Basis $\{\gamma_1, \dots, \gamma_n\}$ von Y gegeben.

Aus diesen Angaben lassen sich dann die Zahlen $\langle \delta_i, \delta_j^\vee \rangle$ für $i, j = 1, \dots, l$ bestimmen, mit Hilfe derer man alle Wurzeln aus Φ und alle Kowurzeln aus $\Phi^\vee$ berechnen kann (vergleiche Abschnitt 1.6). Wir versehen Φ mit der auf Seite 20 beschriebenen Totalordnung bezüglich Δ . Die Datenstrukturen zur Speicherung von Elementen aus $\mathbf{G}$ und diverser Teilmengen von $\mathbf{G}$ wählen wir wie folgt:

1.9.1 Bemerkung (Datenstrukturen)

Zur Speicherung von Elementen aus $\mathbf{G}$ verwenden wir die folgenden Datenstrukturen:

- (a) Ein Element $x \in \mathbf{G}$ mit Bruhatzerlegung $x = u' w h u$ speichern wir als ein Quartupel (u', w, h, u) mit $u \in \mathbf{U}$, $h \in \mathbf{T}$, $w \in W$ und $u \in \mathbf{U}_w$.
- (b) Die Weylgruppenelemente w speichern wir als Permutationen der Wurzeln in Φ .
- (c) Zur Speicherung der Elemente in $\mathbf{U}$ und $\mathbf{U}_w (w \in W)$ benutzen wir, dass $\mathbf{U}_w$ eine Teilmenge von $\mathbf{U}$ ist und dass sich jedes Element $u \in \mathbf{U}$ nach Satz 1.6.1 in eindeutiger Weise in der Form

$$u = x_{r_1}(t_1) x_{r_2}(t_2) \cdots x_{r_m}(t_m)$$

mit $r_1, \dots, r_m \in \Phi^+$, $r_1 < \cdots < r_m$ (bezüglich der auf Φ gewählten Totalordnung) und $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{F}^\times$ schreiben lässt. Wir speichern dann u als das Paar von Listen

$$([r_1, \dots, r_m], [t_1, \dots, t_m]) .$$

- (d) Zur Speicherung der Toruselemente h wählen wir zunächst eine andere Parametrisierung des maximalen Torus $\mathbf{T}$. Wir benutzen hierzu den Isomorphismus θ von abelschen Gruppen (vgl. Proposition 3.1.1 in Carter [7]):

$$\theta : \begin{array}{ccc} Y \otimes \mathbb{F}^\times & \rightarrow & \text{Hom}(X, \mathbb{F}^\times) \\ \gamma \otimes \lambda & \mapsto & (\chi \mapsto \lambda^{\langle \chi, \gamma \rangle}). \end{array} \quad (1.23)$$

Unter Beachtung des natürlichen Isomorphismus von abelschen Gruppen zwischen $\text{Hom}(X, \mathbb{F}^\times)$ und $\mathbf{T}$ wie wir ihn im Abschnitt 1.7 beschrieben haben, erhalten wir hiermit eine Parametrisierung von $\mathbf{T}$. Da jedes Element aus $Y \otimes \mathbb{F}^\times$ eine eindeutige Darstellung der Form $\sum_{i=1}^n \gamma_i \otimes \lambda_i$ mit $\lambda_i \in \mathbb{F}^\times$ besitzt, können wir also die Elemente aus $\mathbf{T}$ durch n -Tupel

$$(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \quad (1.24)$$

mit $\lambda_i \in \mathbb{F}^\times$, $i = 1, \dots, n$ parametrisieren.

Zum Rechnen in $\mathbf{G}$ müssen wir wissen, wie man zwei Elemente $x, y \in \mathbf{G}$ multipliziert, d.h. wir müssen einen Algorithmus beschreiben, der aus den Bruhat-Zerlegungen von x und y die Bruhat-Zerlegung von xy liefert. Hierzu betrachten wir zunächst einige Spezialfälle:

1.9.2 Bemerkung

- (a) Die Multiplikation und Invertierung von Elementen aus $\mathbf{U}$ haben wir bereits in Abschnitt 1.6 erörtert.
- (b) Die Multiplikation zweier durch n -Tupel parametrisierten Toruselemente (vgl. Bemerkung 1.9.1, Teil (d)) geschieht komponentenweise. Auch das Invertieren eines durch ein n -Tupel parametrisierten Toruselementes erfolgt durch komponentenweises Invertieren.
- (c) Für $w \in W$ und $r \in \Delta$ lässt sich die Multiplikation von $\dot{w}$ und n_r wie folgt durchführen:

$$\dot{w}n_r = \begin{cases} (ws_r) & , \text{ falls } rw^{-1} > 0 \\ (ws_r) h_r & , \text{ falls } rw^{-1} < 0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Schreibt man $r^\vee$ als $\mathbb{Z}$ -Linearkombination des Fundamentalsystems $\{\delta_1^\vee, \dots, \delta_l^\vee\}$ in der Form

$$r^\vee = \sum_{i=1}^n r_i^\vee \delta_i^\vee,$$

so ist h_r durch das n -Tupel $((-1)^{r_1^\vee}, \dots, (-1)^{r_n^\vee})$ gegeben. Für $w \in \mathbf{W}$ lässt sich das Inverse $(\dot{w})^{-1}$ wie folgt berechnen: Es seien $p_1, \dots, p_k$ die positiven Wurzeln, die unter w auf negative abgebildet werden. Dann ist

$$(\dot{w})^{-1} = (w^{-1}) \cdot \prod_{i=1}^k h_{p_i}. \quad (1.26)$$

Beweis: Zum Beweis von (a) siehe Abschnitt 1.6. Die Behauptung in (b) ergibt sich aus der Definition des Isomorphismus θ , wie sie in (1.23) gegeben ist, und den Relationen (1.11). Zum Beweis von Teil (c) beachte man, dass $rw^{-1} > 0$ genau dann gilt, wenn $l(ws_r) = l(w) + 1$ gilt (vergleiche Lemma 2.2.1 in [6]). Die Behauptung über die Multiplikation von $\dot{w}$ und n_r in (c) folgt dann aus der “Exchange Condition” für Coxeter Gruppen (siehe Abschnitt 1.7 in [27]) und der Relation (1.16). Das n -Tupel für h_r erhält man aus der Definition von h_r in (1.16) und der Definition des Isomorphismus θ in Bemerkung 1.9.1, (d). Die Aussage über die Invertierung von $\dot{w}$ lässt sich folgendermaßen einsehen: Wir schreiben w als reduziertes Produkt von Fundamentalspiegelungen $w = s_{r_1} \cdots s_{r_k}$. Gemäß der Relation (1.16) gilt dann:

$$(\dot{w})^{-1} = (n_{r_1} \cdots n_{r_k})^{-1} = n_{r_k} h_{r_k} \cdots n_{r_2} h_{r_2} \cdot n_{r_1} h_{r_1}. \quad (1.27)$$

Wir setzen nun $w_i := s_{r_{i-1}} \cdots s_{r_2} s_{r_1}$ für $i = 1, 2, \dots, k$. Durch sukzessive Anwendung von (1.19) erhält man dann aus (1.27):

$$(\dot{w})^{-1} = n_{r_k} \cdots n_{r_2} n_{r_1} \cdot \prod_{i=1}^k h_{r_i w_i}.$$

Nach Proposition 2.5.16 in Carter [7] sind die Wurzeln $r_i w_i$, $i = 1, \dots, k$ genau die positiven Wurzeln, die von w auf negative abgebildet werden (man beachte, dass in Carter [7] die Weylgruppe von *links* auf den Wurzeln operiert, während sie bei uns von *rechts* operiert). Wegen $n_{r_k} \cdots n_{r_2} n_{r_1} = (w^{-1})$ folgt die Behauptung. ■

Zum Rechnen in $\mathbf{G}$ werden wir Kenntnisse über Operationen gewisser Untergruppen benötigen. Diese Operationen sollen in der folgenden Bemerkung kurz zusammengestellt werden:

1.9.3 Bemerkung

- (a) Die Operation eines Toruselementes h , das durch ein n -Tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{F}^\times)^n$ gegeben ist, auf unipotenten Elementen lässt sich wie folgt beschreiben: Für ein unipotent Element $x_r(u)$ mit $r \in \Phi$ und $u \in \mathbb{F}$ gilt:

$$x_r(u)^h = x_r \left(u \prod_{i=1}^n \lambda_i^{r_i} \right), \quad (1.28)$$

$${}^h x_r(u) = x_r \left(u \prod_{i=1}^n \lambda_i^{-r_i} \right), \quad (1.29)$$

wobei $r_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \dots, n$ durch $r = \sum_{i=1}^n r_i \delta_i$ definiert sind.

- (b) Die Operation eines Elementes n_r mit $r \in \Delta$ auf dem maximalen Torus $\mathbf{T}$ ist folgendermaßen gegeben: Wir hatten bereits in Abschnitt 1.2 gesehen, dass $\mathbf{W}$

vermöge (1.2) auf Y von rechts operiert. Es sei $(s_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ die Matrix dieser Operation von $s_r^\vee$ auf Y bezüglich des Fundamentalsystems $\Delta^\vee$. Für ein Toruselement h , das durch ein n -Tupel $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{F}^\times)^n$ gegeben ist, gilt dann:

$$h^{n_r} = {}^{n_r}h = h'$$

wobei h' durch das n -Tupel $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ mit

$$\mu_i = \prod_{k=1}^n \lambda_k^{s_{ki}} \quad (1.30)$$

für $i = 1, \dots, n$ gegeben ist. Ein Algorithmus zur Berechnung der Matrix (s_{ij}) ist in der Dokumentation der Funktion `MatYPerm` in `CHEVIE` beschrieben.

- (c) Die Operation eines Elementes n_{r_1} auf einem unipotenten Element $x_{r_2}(u)$ mit $r_1, r_2 \in \Phi$ und $u \in \mathbb{F}$ ist wie folgt gegeben:

$$x_{r_2}(u)^{n_{r_1}} = x_{s_{r_1}(r_2)}(\eta_{r_1, r_2} u), \quad (1.31)$$

$${}^{n_{r_1}}x_{r_2}(u) = x_{s_{r_1}(r_2)}(\eta_{r_1, r_2} (-1)^{\langle r_2, r_1^\vee \rangle} u). \quad (1.32)$$

Hierbei ist $\langle r_2, r_1^\vee \rangle = \sum_{i=1}^n (r_2)_i (r_1^\vee)_i$ mit $r_1^\vee = \sum_{i=1}^n (r_1^\vee)_i \delta_i^\vee$, $r_2 = \sum_{i=1}^n (r_2)_i \delta_i$.

Beweis: Teil (a) folgt aus der Definition des Isomorphismus θ (siehe (1.23)) und den Relationen (1.11) sowie (1.14). Die Aussage in (b) folgt durch Nachrechnen aus der Definition des Isomorphismus θ und der Formel (1.19), wenn man beachtet, dass $\langle \chi^{s_r}, \gamma \rangle = \langle \chi, \gamma^{s_r^\vee} \rangle$ für alle $\chi \in X$ und $\gamma \in Y$ gilt. Die Aussagen in (c) folgen aus (1.15) und (1.29), wenn man $n_{r_1}^{-1} = n_{r_1} h_{r_1}$ beachtet. ■

Nun können wir (endlich!) den Algorithmus angeben, den wir benutzen, um aus den Bruhat-Zerlegungen zweier Elemente $x, y \in \mathbf{G}$ die Bruhat-Zerlegung von xy zu berechnen.

Es sei $x = u'whu$ die Bruhat-Zerlegung von x . Es genügt, für y die folgenden drei Fälle zu betrachten:

- 1.) $y = h' \in \mathbf{T}$,
- 2.) $y = x_r(t)$ mit $r \in \Phi^+$ und $t \in \mathbb{F}$,
- 3.) $y = n_r$ mit $r \in \Delta$.

Zu 1.):

Man erhält in diesem Fall:

$$xy = (u'whu) \cdot h' = u'w(hh')(u^{h'}).$$

Dieser Ausdruck lässt sich mittels der Bemerkungen 1.9.2 und 1.9.3 berechnen und liefert so die gesuchte Bruhat-Zerlegung von xy . In diesem Fall ist insbesondere kein „Collecting“ erforderlich.

Zu 2.):

Man erhält in diesem Fall:

$$xy = (u' \dot{w} h u) \cdot x_r(t) = u' \dot{w} h (u x_r(t)).$$

Nach Anwendung des „Collecting Process“ auf den Ausdruck $u x_r(t)$ erhält man die gesuchte Normalform für xy .

Zu 3.):

Zunächst benutzen wir den „Collecting Process“ aus dem Beweis von Bemerkung 1.6.2, um u in der Form

$$u = x_r(t) u''$$

mit $u'' = x_{r_1}(t_1) \cdots x_{r_m}(t_m)$ und $r_1, \dots, r_m \in \Phi^+ \setminus \{r\}$, $t, t_1, \dots, t_m \in \mathbb{F}$ zu schreiben. Wir unterscheiden nun drei Fälle:

A $t = 0$,

B $t \neq 0, r w^{-1} > 0$,

C $t \neq 0, r w^{-1} < 0$.

Zu A: Man hat dann

$$xy = (u' \dot{w} h u) \cdot n_r = (u' \dot{w} h u'') \cdot n_r = u' (\dot{w} n_r) (h^{n_r}) ((u'')^{n_r}).$$

Dieser Ausdruck lässt sich mittels der Bemerkungen 1.9.2 und 1.9.3 berechnen. Man erhält dann eine explizite Darstellung von xy in der Form

$$xy = u''' (w') h''' v''' .$$

mit $u''' = u'$, $w' = w s_r$, $v''' = (u'')^{n_r}$ und $h''' \in \mathbf{T}$. Allerdings haben wir damit im Allgemeinen noch nicht die Bruhat-Zerlegung von xy gefunden, da im Allgemeinen u''' nicht in $\mathbf{U}_{w'}$ enthalten ist. Es seien hierzu $p_1, \dots, p_k$ die positiven Wurzeln, die unter w' auf negative Wurzeln abgebildet werden und $p'_1, \dots, p'_{k'}$ die übrigen positiven Wurzeln. Man benutzt nun den „Collecting Process“ aus dem Beweis von Bemerkung 1.6.2, um u''' in der Form $u''' = u_1''' \cdot u_2'''$ mit $u_1''' \in X_{p_1} \cdots X_{p_k}$ und $u_2''' \in X_{p'_1} \cdots X_{p'_{k'}}$ zu schreiben. Man erhält dann

$$xy = u_1''' (w') h''' \left((u_2''')^{(w') h'''} v''' \right) . \quad (1.33)$$

Auf Grund der Relationen (1.14) und (1.15) ist $(u_2''')^{(w')h'''} \in \mathbf{U}$. Der Ausdruck auf der rechten Seite von (1.33) lässt sich mittels der Bemerkungen 1.9.2 und 1.9.3 berechnen und liefert die Bruhat-Zerlegung von xy .

Zu B: Man erhält in diesem Fall:

$$xy = (u' \dot{w} h u) \cdot n_r = (u' \dot{w} h x_r(t) u'') \cdot n_r = \left(u' (\dot{w}^h x_r(t)) \right) (\dot{w} n_r) (h^{n_r}) ((u'')^{n_r}) .$$

Dieser Ausdruck lässt sich mittels der Bemerkungen 1.9.2 und 1.9.3 berechnen. Wie unter A erhält man daraus dann die Bruhat-Zerlegung von xy .

Zu C: In diesem Fall erhält man unter Ausnutzung von Relation (1.18):

$$xy = (u' \dot{w} h u) \cdot n_r = \left(u' \left(\dot{w}^h x_{-r}(t^{-1}) \right) \right) \dot{w} (h \overline{r^\vee}(-t^{-1})) \left(x_r(-t)^{\overline{r^\vee}(-t^{-1})} (u'')^{n_r} \right) .$$

Dieser Ausdruck lässt sich mittels der Bemerkungen 1.9.2 und 1.9.3 berechnen, wenn man noch beachtet, dass $\overline{r^\vee}(t)$ durch das n -Tupel $(t^{r_1^\vee}, \dots, t^{r_n^\vee})$ mit $r^\vee = \sum_{i=1}^n r_i^\vee \delta_i^\vee$ gegeben ist. Wie unter A erhält man daraus dann die Bruhat-Zerlegung von xy .

Damit haben wir nun einen Algorithmus, der aus den Bruhat-Zerlegungen zweier Elemente $x, y \in \mathbf{G}$ die Bruhat-Zerlegung von xy berechnet.

Mit Hilfe dieses Algorithmus' lässt sich nun auch die Bruhat-Zerlegung eines beliebigen Elements $x \in \mathbf{G}$ berechnen, das als Produkt der Erzeuger $t \in \mathbf{T}$ und $x_r(u)$, $r \in \Phi$, $u \in \mathbb{F}$ gegeben ist. Aus den oben beschriebenen Schritten 1.), 2.) und 3.) ist klar, dass es genügt, den Fall $x = x_r(u)$ mit $r \in \Phi$, $r < 0$, $u \in \mathbb{F}$ zu betrachten. Es gibt dann ein $\delta \in \Delta$ und $w \in \mathbf{W}$ mit $r = \delta w$. Wir schreiben w als reduziertes Produkt von Fundamentalspiegelungen $w = s_{r_1} \cdots s_{r_k}$. Wir setzen ferner

$$w_1 := s_{r_1}, w_2 := s_{r_1} s_{r_2}, \dots, w_k := s_{r_1} \cdots s_{r_k} = w$$

und

$$\eta := \eta_{\delta, \delta w_1} \eta_{\delta w_1, \delta w_2} \cdots \eta_{\delta w_{k-1}, \delta w_k} .$$

Dann folgt aus den Relationen (1.15):

$$x_r(u) = (\dot{w})^{-1} x_\delta(\eta u) \dot{w} .$$

Dieser Ausdruck lässt sich mittels (1.26) und den Schritten 1.), 2.) und 3.) des oben beschriebenen Algorithmus' berechnen.

Wir invertieren ein Element $x \in \mathbf{G}$ mit Bruhat-Zerlegung $x = u' \dot{w} h u$, indem wir u' , $\dot{w}$, h und u mittels Bemerkung 1.9.2 einzeln invertieren und anschließend die Inversen in umgekehrter Reihenfolge mit den Schritten 1.), 2.) und 3.) des oben beschriebenen Algorithmus' aufmultiplizieren.

1.9.4 Bemerkung

- (a) Legt man in dem obigen Algorithmus statt des algebraisch abgeschlossenen Körpers $\mathbb{F}$ einen endlichen Körper $\mathbb{F}_q$ zu Grunde, so beschreibt der Algorithmus das Rechnen in der entsprechenden Chevalley-Gruppe über $\mathbb{F}_q$.
- (b) Den oben beschriebenen Algorithmus zum Rechnen in zusammenhängenden reduktiven Gruppen habe ich mit Hilfe des Programmpakets CHEVIE [21] im Computeralgebrasystem GAP [36] implementiert. Unabhängig von der vorliegenden Arbeit wurde ein ähnlicher, aber auf einer etwas anderen Präsentation basierender Algorithmus von A. M. Cohen, S. Murray und D. E. Taylor in Magma [2] implementiert (siehe [11]).

Kapitel 2

Die Steinbergschen Trialitätsgruppen

Die endlichen einfachen Gruppen vom Lie-Typ bilden eine besonders wichtige Klasse in der Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen. Da alle endlichen Gruppen vom Lie-Typ als Untergruppen von zusammenhängenden reductiven linearen algebraischen Gruppen über algebraisch abgeschlossenen Körpern aufgefasst werden können, können die im vorigen Kapitel beschriebenen Algorithmen zum Rechnen in diesen Gruppen benutzt werden. In diesem Kapitel wollen wir zeigen, wie sich die Algorithmen konkret anwenden lassen, um Berechnungen in einer bestimmten Klasse von endlichen einfachen Gruppen vom Lie-Typ, den Steinbergschen Trialitätsgruppen ${}^3D_4(q)$, durchführen zu können.

Da wir in den folgenden Kapiteln auf einige Ergebnisse aus Geck [19] zurückgreifen werden, beschreiben wir zunächst noch einmal kurz die Konstruktion einer Chevalley-Gruppe $\mathbf{G} = D_4(\mathbb{F})$ über einem Körper $\mathbb{F}$ mit Hilfe einer einfachen Lie-Algebra vom Typ D_4 . Wir wählen dann für $\mathbb{F}$ den algebraischen Abschluss des Körpers $\mathbb{F}_q$ mit q Elementen, so dass $\mathbf{G}$ eine einfache algebraische Gruppe von adjungiertem Typ ist, definiert über $\mathbb{F}_q$. Anschließend konstruieren wir die Steinbergschen Trialitätsgruppen ${}^3D_4(q)$ als Fixpunktgruppen $\mathbf{G}^F$ eines Frobeniusmorphismus $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$, so dass wir für diese Gruppen die Theorie der endlichen Gruppen vom Lie-Typ zur Verfügung haben.

Am Ende des Kapitels beschreiben wir speziell für $\mathbf{G} = D_4(\mathbb{F})$ die Präsentation aus Abschnitt 1.7. Wir bestimmen insbesondere die Kommutatorrelationen für die Trialitätsgruppen sowie die Operation eines maximal zerfallenden Torus auf den Wurzeluntergruppen. Dadurch erhalten wir die Möglichkeit, effiziente Rechnungen in $\mathbf{G}$ und der Untergruppe $\mathbf{G}^F$ durchzuführen. Hiervon werden wir insbesondere im nächsten Kapitel bei der Bestimmung von konjugierten Klassen parabolischer Untergruppen vielfach Gebrauch machen.

2.1 Das Wurzelsystem vom Typ D_4

Der Vollständigkeit halber geben wir in diesem Abschnitt eine kurze Beschreibung des Wurzelsystems vom Typ D_4 , das wir zur Definition der Trialitätsgruppen benötigen. Dieser Abschnitt – insbesondere die hier gewählte Notation – folgt in weiten Teilen Abschnitt 3.1 aus Geck [19].

Es sei V ein euklidischer Vektorraum mit Orthonormalbasis e_1, e_2, e_3, e_4 . Die Menge

$$\Phi := \{\varepsilon_1 e_i + \varepsilon_2 e_j \mid i, j = 1, \dots, 4, i \neq j, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{1, -1\}\}$$

bildet dann ein Wurzelsystem vom Typ D_4 . Die Menge $\Delta := \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$ mit

$$r_1 := e_1 - e_2, \quad r_2 := e_2 - e_3, \quad r_3 := e_3 - e_4, \quad r_4 := e_3 + e_4$$

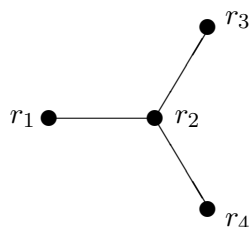
ist ein Fundamentalsystem von Φ . Es gilt $e_1 = r_1 + r_2 + (r_3 + r_4)/2$, $e_2 = r_2 + (r_3 + r_4)/2$, $e_3 = (r_3 + r_4)/2$, $e_4 = (r_4 - r_3)/2$. Daraus kann man alle Wurzeln als Linearkombinationen der einfachen Wurzeln r_i berechnen. Für alle Wurzeln $r \in \Phi$ gilt nach Konstruktion $(r, r) = 2$. Analog zu Abschnitt 1.4 definieren wir

$$A_{rs} := \frac{2(r, s)}{(r, r)} = (r, s),$$

für Wurzeln $r, s \in \Phi$. Die Einträge der *Cartan-Matrix* $C = (c_{ij})_{i,j=1,\dots,4}$ sind dann durch $c_{ij} := 2(r_i, r_j)/(r_i, r_i) = (r_i, r_j)$ für $i, j = 1, \dots, 4$ gegeben. Man erhält:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das zugehörige Dynkin-Diagramm hat folgende Gestalt:



Es sei nun L eine einfache Lie-Algebra über $\mathbb{C}$ mit Wurzelsystem Φ . Wir betten Φ mit Hilfe der Killing-Form in eine Cartan-Unteralgebra H von L ein und fassen die Wurzeln

$r \in \Phi$ als Elemente von H auf. Dann besitzt L eine Basis $\{h_r | r \in \Delta\} \cup \{e_r | r \in \Phi\}$, deren Elemente wie folgt miteinander multipliziert werden:

$$\begin{aligned} [h_r, h_s] &= 0 && \text{für alle } r, s \in \Delta, \\ [h_r, e_s] &= A_{rs} e_s && \text{für alle } r \in \Delta \text{ und } s \in \Phi, \\ [e_r, e_{-r}] &= h_r && \text{für alle } r \in \Phi, \\ [e_r, e_s] &= N_{rs} e_{r+s} && \text{für alle } r, s \in \Phi, r \neq -s. \end{aligned}$$

Dabei ist $N_{rs} = 0$, falls $r + s \notin \Phi$ und

$$N_{rs} = \varepsilon_{rs}(m+1) \text{ mit } \varepsilon_{rs} \in \{1, -1\},$$

falls $r + s \in \Phi$. Die nicht-negative ganze Zahl m ist eindeutig festgelegt durch die Bedingung, dass $s - mr \in \Phi$, aber $s - (m+1)r \notin \Phi$ gilt.

Wie schon in Abschnitt 1.4 definieren wir auf V eine Totalordnung wie folgt: Sei V^+ die Menge aller Vektoren $v = \sum_{i=1}^l c_i r_i \in V$, bei denen der erste von Null verschiedene Koeffizient c_i positiv ist. Wir schreiben dann $v > w$ für $v, w \in V$, falls $v - w \in V^+$ ist.

Bezüglich dieser Totalordnung können wir spezielle und extraspezielle Paare von Wurzeln wie in Abschnitt 1.4 definieren (vgl. Definition 1.4.2). Die Vorzeichen ε_{rs} können wir für alle extraspeziellen Paare (r, s) beliebig wählen, womit dann die Vorzeichen ε_{rs} für die übrigen Paare $(r, s) \in \Phi \times \Phi$ mit $r + s \in \Phi$ via Satz 1.4.1 eindeutig bestimmt sind.

Die extraspeziellen Paare in Φ sind: $(r_2, r_1), (r_3, r_2), (r_4, r_2), (r_3, r_1 + r_2), (r_4, r_1 + r_2), (r_4, r_2 + r_3), (r_4, r_1 + r_2 + r_3), (r_2, r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$. Da für jedes extraspezielle Paar (r, s) die Zahl m gleich 0 ist, können wir die Strukturkonstanten N_{rs} für die extraspeziellen Paare wie folgt wählen:

extraspezielles Paar	N_{rs}
(r_2, r_1)	1
(r_3, r_2)	-1
(r_4, r_2)	-1
$(r_3, r_1 + r_2)$	1
$(r_4, r_1 + r_2)$	1
$(r_4, r_2 + r_3)$	1
$(r_4, r_1 + r_2 + r_3)$	1
$(r_2, r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$	1

Tabelle 2.1: Strukturkonstanten für die extraspeziellen Paare

Die obige Wahl der Vorzeichen stimmt überein mit der Wahl in Geck [19]. Eine Begründung dafür, dass wir zwei negative Vorzeichen gewählt haben, folgt bei der Konstruktion des Frobeniusmorphismus F im nächsten Abschnitt.

Mit Hilfe von Satz 1.4.1 und Tabelle 2.1 lassen sich sämtliche Strukturkonstanten N_{rs} für $r, s \in \Phi$ berechnen. Der Vollständigkeit und besseren Nachprüfbarkeit halber sind im Anhang in Tabelle A.1 die Strukturkonstanten für alle Wurzelpaare aufgelistet.

2.2 Die Steinbergschen Trialitätsgruppen

In diesem Abschnitt wollen wir noch einmal kurz die Konstruktion der Steinbergschen Trialitätsgruppen ${}^3D_4(q)$ beschreiben. Wir orientieren uns hierbei an den Abschnitten 3.2 und 3.4 in Geck [19], wobei wir allerdings ausführlicher auf die Konstruktion des Frobenius-Morphismus F eingehen. Anschließend wird gezeigt, wie sich die in Kapitel 1 vorgestellten Methoden zum Rechnen in den Trialitätsgruppen benutzen lassen. Leichte Unterschiede zu Geck [19] ergeben sich dadurch, dass wir Operationen von rechts und nicht von links betrachten.

Es sei $q = p^n$ eine Potenz einer Primzahl p und $\mathbb{F}_q$ der Körper mit q Elementen. Wir wählen einen algebraischen Abschluss $\mathbb{F}$ des Körpers $\mathbb{F}_q$. Mit $\mathbb{F}_{q^3}$ bezeichnen wir den eindeutig bestimmten Teilkörper von $\mathbb{F}$, der aus genau q^3 Elementen besteht. Mit L bezeichnen wir weiterhin die im vorigen Abschnitt eingeführte einfache Lie-Algebra über $\mathbb{C}$ vom Typ D_4 mit Basis $\{h_r | r \in \Delta\} \cup \{e_r | r \in \Phi\}$. Es sei $L_{\mathbb{Z}}$ die Teilmenge von L , die aus den $\mathbb{Z}$ -Linearkombinationen der h_r ($r \in \Delta$) und e_r ($r \in \Phi$) besteht. Da sämtliche Strukturkonstanten von L bezüglich der Basis $\{h_r | r \in \Delta\} \cup \{e_r | r \in \Phi\}$ ganze Zahlen sind, wird $L_{\mathbb{Z}}$ in natürlicher Weise eine Lie-Algebra über $\mathbb{Z}$. Somit wird $L_{\mathbb{F}} := L_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}$ in natürlicher Weise eine Lie-Algebra über $\mathbb{F}$, deren Strukturkonstanten die Strukturkonstanten von L , modulo p genommen, sind. Für $r \in \Phi$ und $c \in \mathbb{C}$ ist $\exp(c \cdot \text{ad}(e_r))$ ein Automorphismus von L . Daraus lässt sich ein Automorphismus $x_r(t)$ von $L_{\mathbb{F}}$ konstruieren. Definiert man dann $\mathbf{G} := D_4(\mathbb{F})$ als das Erzeugnis der Automorphismen $x_r(t)$, $r \in \Phi$, $t \in \mathbb{F}$, so ist $\mathbf{G}$ eine (zusammenhängende) einfache algebraische Gruppe von adjungiertem Typ mit Wurzelsystem Φ (vergleiche Paragraph 5 in Steinberg [41]). Die Wurzeluntergruppen von $\mathbf{G}$ sind gegeben durch

$$X_r = \langle x_r(t) | t \in \mathbb{F} \rangle.$$

Wir wollen nun einen surjektiven Morphismus $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ von algebraischen Gruppen konstruieren, dessen Fixpunktmenge endlich ist. Setzt man $m := 4 + |\Phi| = 28$, so ist $\mathbf{G}$ als Untergruppe der Automorphismengruppe von $L_{\mathbb{F}}$ in natürlicher Weise als abgeschlossene Untergruppe in die $GL_{28}(\mathbb{F})$ eingebettet (vergleiche Lemma 34 in Steinberg [41] und Théorème 2 im Exposé 3 des Séminaire Chevalley [10]).

Wir konstruieren F in zwei Schritten. Die Abbildung $GL_{28}(\mathbb{F}) \rightarrow GL_{28}(\mathbb{F})$, die jeder Matrix (a_{ij}) die Matrix (a_{ij}^q) zuordnet, bildet $x_r(t)$ auf $x_r(t^q)$ für alle $r \in \Phi$ und $t \in \mathbb{F}$ ab und lässt somit $\mathbf{G}$ invariant. Wir definieren nun $F_q : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ als die Einschränkung

dieser Abbildung. F_q ist somit ein Morphismus von algebraischen Gruppen und heißt eine *Standard-Frobenius-Abbildung*. Im zweiten Schritt konstruieren wir einen Morphismus $\rho : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ folgendermaßen: Es sei $\rho : \Phi \rightarrow \Phi$ die natürliche Symmetrie des Dynkin-Diagramms D_4 , also $\rho r_2 = r_2$, $\rho r_1 = r_3$, $\rho r_3 = r_4$ und $\rho r_4 = r_1$. Unter Benutzung der Tatsache, dass alle Wurzeln aus Φ gleiche Länge haben, kann man einen Liealgebren-Automorphismus $L \rightarrow L$ mit

$$\begin{aligned} h_r &\mapsto h_{\rho(r)} && \text{für alle } r \in \Delta, \\ e_r &\mapsto \gamma_r e_{\rho(r)} && \text{für alle } r \in \Phi, \end{aligned}$$

und $\gamma_r \in \{1, -1\}$ konstruieren (vergleiche den Beweis von Proposition 12.2.3 in Carter [6]). Die Vorzeichen $\gamma_r \in \{1, -1\}$ sind hierbei wie folgt gegeben: Ist $r \in \Delta$, so ist $\gamma_r = 1$. Die γ_r für die restlichen positiven Wurzeln r sind rekursiv (nach der Höhe von r) definiert: Ist $r > 0$, $r \in \Phi$ nicht einfach, so gibt es ein eindeutig bestimmtes extraspezielles Paar r_1, s_1 mit $r = r_1 + s_1$. Dann ist

$$\gamma_r = \gamma_{r_1} \gamma_{s_1} \frac{N_{\rho(r_1), \rho(s_1)}}{N_{r_1, s_1}}.$$

Für negative Wurzeln $r \in \Phi$ ist $\gamma_r = \gamma_{-r}$. Auf Grund unserer Wahl der Vorzeichen der Strukturkonstanten für die extraspeziellen Paare (vergleiche Tabelle 2.1) gilt

$$N_{rs} = N_{\rho(r), \rho(s)}$$

für alle extraspeziellen Paare r, s . In unserem Fall gilt also $\gamma_r = 1$ für alle $r \in \Phi$. Hieraus erklärt sich auch die Wahl der beiden negativen Vorzeichen in Tabelle 2.1. Da die Matrix des soeben konstruierten Liealgebren-Automorphismus $L \rightarrow L$ bezüglich der Basis $\{h_r | r \in \Delta\} \cup \{e_r | r \in \Phi\}$ ganzzahlig ist, erhält man durch Reduktion modulo p einen Liealgebren-Automorphismus $\Theta : L_{\mathbb{F}} \rightarrow L_{\mathbb{F}}$ mit

$$\begin{aligned} h_r &\mapsto h_{\rho(r)} && \text{für alle } r \in \Delta, \\ e_r &\mapsto e_{\rho(r)} && \text{für alle } r \in \Phi. \end{aligned}$$

Wir betrachten den inneren Automorphismus von $GL_{28}(\mathbb{F})$, der durch Konjugation mit Θ von rechts bewirkt wird. Wegen $\mathbf{G} = \langle x_r(t) | r \in \Phi, t \in \mathbb{F} \rangle$ und

$$\Theta^{-1} x_r(t) \Theta = \exp(t \cdot \text{ad}(\Theta(e_r))) = \exp(t \cdot \text{ad}(e_{\rho(r)})) = x_{\rho(r)}(t) \quad (2.1)$$

für alle $r \in \Phi$ und $t \in \mathbb{F}$ ist $\mathbf{G}$ invariant unter der Konjugation mit Θ . Die Einschränkung des zu Θ gehörenden inneren Automorphismus bewirkt also einen Automorphismus

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &\rightarrow \mathbf{G} \\ x_r(t) &\mapsto x_{\rho(r)}(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

(für $r \in \Phi$ und $t \in \mathbb{F}$) von algebraischen Gruppen, den wir (unter Missbrauch der Notation) auch mit ρ bezeichnen.

Nun definieren wir $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ durch $F := F_q \circ \rho = \rho \circ F_q$. Als Komposition zweier Morphismen von algebraischen Gruppen ist F ebenfalls ein Morphismus von algebraischen Gruppen, und es gilt:

$$F(x_r(t)) = x_{\rho(r)}(t^q) \quad (2.3)$$

für alle $r \in \Phi$ und $t \in \mathbb{F}$. Da die dritte Potenz von F mit der dritten Potenz der Standard-Frobenius-Abbildung F_q übereinstimmt, ist $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ eine *Frobeniusabbildung* im Sinne von Abschnitt 1.17 in Carters Buch „Finite Groups of Lie-Type“ [7].

Die *Steinbergschen Trialitätsgruppen* ${}^3D_4(q)$ sind definiert als die Gruppen

$$\mathbf{G}^F := \{g \in \mathbf{G} \mid F(g) = g\}$$

der Fixpunkte von $\mathbf{G}$ unter F . Für jedes q ist ${}^3D_4(q)$ eine endliche einfache Gruppe der Ordnung

$$|{}^3D_4(q)| = q^{12}(q^8 + q^4 + 1)(q^6 - 1)(q^2 - 1).$$

Die Frobeniusabbildung F wird manchmal auch *Trialitätsautomorphismus* genannt. Als Fixpunktmenge von Frobeniusabbildungen algebraischer Gruppen sind die Steinbergschen Trialitätsgruppen *endliche Gruppen vom Lie-Typ*. Für solche Gruppen steht eine umfangreiche Theorie zur Verfügung, die wir im Folgenden auch benutzen wollen.

Wir beschreiben nun noch, wie die Algorithmen und GAP-Programme aus Kapitel 1 zum Rechnen in $\mathbf{G}$ und damit auch zum Rechnen in den Trialitätsgruppen benutzt werden können.

Zu diesem Zweck definieren wir zunächst ein geeignetes Wurzeldatum: Wir wählen $X := \mathbb{Z}^4$ und $Y := \mathbb{Z}^4$ versehen mit der natürlichen Paarung $\mathbb{Z}^4 \times \mathbb{Z}^4 \rightarrow \mathbb{Z}$. Wir definieren die Wurzelsysteme $\Phi \subseteq X$ und $\Phi^\vee \subseteq Y$ durch die Angabe von Basen der Wurzelsysteme. Die einfachen Wurzeln in Φ bzw. $\Phi^\vee$ seien durch

$$\Delta := \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\} \text{ bzw.}$$

$$\Delta^\vee := \{(2, -1, 0, 0), (-1, 2, -1, -1), (0, -1, 2, 0), (0, -1, 0, 2)\}$$

gegeben. Es sei Ψ das Wurzeldatum $\Psi := (X, \Phi, Y, \Phi^\vee)$. Wir definieren die Konstanten $c_{r,s;i,j}$ wie in Abschnitt 1.4 gemäß (1.8) und (1.9) bezüglich der durch Tabelle 2.1 festgelegten N_{rs} . Es sei nun $\tilde{\mathbf{G}}$ die Gruppe, die durch die Präsentation mit Erzeugern $\tilde{h} \in \text{Hom}(X, \mathbb{F}^\times)$ und Symbolen $\tilde{x}_r(u)$ für $r \in \Phi$ und $u \in \mathbb{F}$ sowie den Relationen (a) bis (h) aus Abschnitt 1.7 gegeben ist. Mit $\mathbf{T}$ bezeichnen wir die Untergruppe $\{\tilde{h} \mid \tilde{h} \in \text{Hom}(X, \mathbb{F}^\times)\}$ von $\tilde{\mathbf{G}}$. Wegen $\mathbb{Z}\Phi = X$ gibt es nach dem Existenzsatz Theorem 10.1.1 und dem Beweis von Theorem 9.4.3 in Springer [40] einen Isomorphismus φ von $\tilde{\mathbf{G}}$ auf eine einfache algebraische Gruppe $\mathbf{H}$ von adjungiertem Typ über dem algebraisch abgeschlossenen Körper $\mathbb{F}$ mit Wurzelsystem D_4 mit folgenden Eigenschaften: $\varphi(\mathbf{T})$ ist ein maximaler Torus von $\mathbf{H}$, und φ bildet für alle $r \in \Phi$ die Untergruppe $\{\tilde{x}_r(u) \mid u \in \mathbb{F}\}$ auf die Wurzeluntergruppe

von $\mathbf{H}$ zur Wurzel r (bezüglich $\varphi(\mathbf{T})$) ab. Da $\mathbf{H}$ als halbeinfache (sogar einfache) algebraische Gruppe von den Wurzeluntergruppen erzeugt wird (vergleiche Theorem 27.5 in Humphreys [28]), wird somit $\tilde{\mathbf{G}}$ von den Elementen $\tilde{x}_r(u)$ mit $r \in \Phi$ und $u \in \mathbb{F}$ erzeugt.

In Abschnitt 1.9 haben wir bereits Algorithmen beschrieben, mit denen wir in $\tilde{\mathbf{G}}$ rechnen können. Diese wollen wir nun zum Rechnen in $\mathbf{G}$ benutzen. Hierzu konstruieren wir einen natürlichen Isomorphismus zwischen $\mathbf{G}$ und $\tilde{\mathbf{G}}$: Aus dem Beweis von Theorem 12.1.1 in Carter [6] und der Tatsache, dass $\mathbf{G}$ keinen nichttrivialen Normalteiler besitzt, folgt zunächst, dass es einen eindeutig bestimmten Homomorphismus

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &\rightarrow \tilde{\mathbf{G}} \quad \text{mit} \\ x_r(u) &\mapsto \tilde{x}_r(u) \end{aligned}$$

für alle $r \in \Phi$ und $u \in \mathbb{F}$ gibt. Dieser Homomorphismus ist injektiv, da $\mathbf{G}$ einfach ist, und surjektiv, da $\tilde{\mathbf{G}}$ von den Elementen $\tilde{x}_r(u)$ mit $r \in \Phi$ und $u \in \mathbb{F}$ erzeugt wird. Es handelt sich also um einen Isomorphismus (von abstrakten Gruppen). Wir werden daher im Folgenden $\mathbf{G}$ mit $\tilde{\mathbf{G}}$ und $x_r(u)$ mit $\tilde{x}_r(u)$ identifizieren. Somit sind die in Kapitel 1 beschriebenen Algorithmen und GAP-Programme anwendbar. Obwohl die in den folgenden Kapiteln durchgeführten Rechnungen prinzipiell auch von Hand durchführbar und nachvollziehbar sind, erleichtert der Einsatz von Computern die Rechenarbeit erheblich und dient maßgeblich der Vermeidung von Rechenfehlern.

2.3 Relationen in ${}^3D_4(q)$

In diesem Abschnitt wollen wir einige Relationen und gruppentheoretische Informationen über die Steinbergschen Trialitätsgruppen zusammenstellen, die wir in späteren Kapiteln benötigen werden. Wir orientieren uns hierbei an Abschnitt 3.3 aus Geck [19].

Es sei hierzu $\mathbf{G}$ die im vorigen Abschnitt beschriebene einfache adjungierte algebraische Gruppe vom Typ D_4 , sowie $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ der Trialitätsautomorphismus und $G := \mathbf{G}^F$ die zugehörige Steinbergsche Trialitätsgruppe.

Die Wurzeluntergruppen von $\mathbf{G} = D_4(\mathbb{F})$ sind die Untergruppen $X_r = \langle x_r(t) | t \in \mathbb{F} \rangle$ für $r \in \Phi$. Die Untergruppe $\mathbf{U} = \langle X_r | r \in \Phi, r \text{ positiv} \rangle$ ist eine maximale unipotente Untergruppe von $\mathbf{G}$. Ihre Struktur wird beschrieben durch die Kommutatorrelationen (1.4). Es seien $r, s \in \Phi$ positive Wurzeln und $u, t \in \mathbb{F}$. Die in den Kommutatorrelationen auftretenden Kommutatorformelkoeffizienten $c_{r,s;i,j}$ lassen sich gemäß (1.8) und (1.9) aus den Strukturkonstanten N_{rs} berechnen. Da in unserem Fall (Typ D_4) stets $i, j \leq 1$ gilt, nehmen hier die Kommutatorrelationen eine besonders einfache Gestalt an:

$$[x_s(u), x_r(t)] = \begin{cases} x_{r+s}(N_{rs}ut) & , \text{ falls } r+s \in \Phi, \\ 1 & , \text{ sonst.} \end{cases} \quad (2.4)$$

Für $r \in \Phi$ und $t \in \mathbb{F}^\times$ setzen wir $n_r(t) := x_r(t)x_{-r}(-t^{-1})x_r(t)$ und $h_r(t) := n_r(t)n_r(-1)$. Es gilt $h_r(t_1t_2) = h_r(t_1)h_r(t_2)$ für alle $r \in \Phi$ und $t_1, t_2 \in \mathbb{F}^\times$. Die Untergruppe $\mathbf{T} = \langle h_r(t) | r \in \Phi \text{ und } t \in \mathbb{F}^\times \rangle$ ist ein maximaler Torus von $\mathbf{G}$. Jedes Element $h \in \mathbf{T}$ lässt sich in der Form

$$h = \prod_{i=1}^4 h_{r_i}(t_i) \text{ für } t_i \in \mathbb{F}^\times \quad (2.5)$$

schreiben. (Zum Beweis beachte man, dass für jedes Element $h \in \mathbf{T}$

$$\begin{aligned} h = & h_{r_1}(x_1^{-1}x_2^{-1}x_3^{-1/2}x_4^{-1/2}) \cdot h_{r_2}(x_1^{-1}x_2^{-2}x_3^{-1}x_4^{-1}) \cdot \\ & h_{r_3}(x_1^{-1/2}x_2^{-1}x_3^{-1}x_4^{-1/2}) \cdot h_{r_4}(x_1^{-1/2}x_2^{-1}x_3^{-1/2}x_4^{-1}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

gilt, wobei h gemäß Bemerkung 1.9.1, (d) durch das 4-Tupel $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in (\mathbb{F}^\times)^4$ gegeben sei und $x_i^{-1/2}$, $i = 1, \dots, 3$ eine fest gewählte Quadratwurzel aus x_i^{-1} sei.)

Die Operation des Frobeniusmorphismus F auf $\mathbf{T}$ lässt sich explizit angeben. Aus der Definition der $h_{r_i}(t_i)$, $i = 1, \dots, 4$ und (2.3) ergibt sich:

$$F\left(\prod_{i=1}^4 h_{r_i}(t_i)\right) = h_{r_1}(t_4^q)h_{r_2}(t_2^q)h_{r_3}(t_1^q)h_{r_4}(t_3^q). \quad (2.7)$$

Hieraus wiederum lässt sich die Operation von F auf $\mathbf{T}$ berechnen, wenn man $\mathbf{T}$ wie in Bemerkung 1.9.1, (d) durch 4-Tupel parametrisiert. Ist $h \in \mathbf{T}$ gemäß Bemerkung 1.9.1, (d) durch das 4-Tupel $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in (\mathbb{F}^\times)^4$ gegeben, so folgt aus (2.6), dass $F(h)$ durch das 4-Tupel

$$(\lambda_4^q, \lambda_2^q, \lambda_1^q, \lambda_3^q)$$

gegeben ist. Für $r, s \in \Phi$ und $u, t \in \mathbb{F}$ gilt:

$$h_r(u)^{-1}x_s(t)h_r(u) = x_s(u^{-(r,s)}t), \quad (2.8)$$

so dass die Operation von $\mathbf{T}$ auf den Wurzeluntergruppen mit Hilfe der Cartan-Matrix berechnet werden kann.

Wir definieren nun für die endliche Gruppe $\mathbf{G}^F$ geeignete Analoga zu den von den algebraischen Gruppen herrührenden Begriffen „Wurzelsystem“, „Wurzeluntergruppen“, „Weylgruppe“ etc. Wir orientieren uns hierbei an den Abschnitten 3.2 und 3.3 aus Geck [19]. Da wir Operationen von rechts und nicht von links zugrundegelegt haben, erhalten wir teilweise etwas andere Relationen als Geck [19]. Wir geben die Relationen ausführlich an, damit die in späteren Kapiteln folgenden Berechnungen zumindest prinzipiell von Hand nachvollziehbar bleiben.

Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf Φ wie folgt: Für $r \in \Phi$ sei $r^1 := 1/3(r + \rho r + \rho^2 r)$. Es seien $r, s \in \Phi$ genau dann äquivalent, wenn r^1 ein positives Vielfaches von s^1

ist. In unserem Fall (Typ D_4) gilt sogar, dass r und s genau dann äquivalent sind, wenn $r^1 = s^1$ ist. Jede Äquivalenzklasse besteht entweder aus genau einer Wurzel, die unter ρ festbleibt, oder aus drei Wurzeln, die durch ρ permutiert werden, und ist damit eindeutig festgelegt durch die Angabe von r^1 für ein r in dieser Äquivalenzklasse. Setzen wir

$$\alpha := \frac{1}{3}(r_1 + r_3 + r_4) \text{ und } \beta := r_2,$$

so ist r^1 für $r \in \Phi$ stets ein Element der Menge

$$\Phi := \{\pm\alpha, \pm\beta, \pm(\alpha + \beta), \pm(2\alpha + \beta), \pm(3\alpha + \beta), \pm(3\alpha + 2\beta)\}, \quad (2.9)$$

die ein Wurzelsystem vom Typ G_2 im $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{Z}\Phi \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ darstellt. Wir nennen Φ das *Wurzelsystem* von $G = {}^3D_4(q) = \mathbf{G}^F$.

Unsere nächste Aufgabe besteht darin, ein Analogon in $\mathbf{G}^F$ für die Wurzeluntergruppen X_r ($r \in \Phi$) sowie eine Beschreibung der Gruppen $\mathbf{U}^F$ und $\mathbf{T}^F$ zu finden. Zunächst setzen wir für $r \in \Phi$ und $t \in \mathbb{F}$ mit $t^{q^3} = t$:

$$x_{r^1}(t) := \begin{cases} x_r(t) & , \text{ falls } \rho r = r, t^q = t, \\ x_r(t)x_{\rho r}(t^q)x_{\rho^2 r}(t^{q^2}) & , \text{ sonst.} \end{cases} \quad (2.10)$$

Wir nennen

$$X_{r^1}^F := \begin{cases} \{x_{r^1}(t) | t \in \mathbb{F} \text{ und } t^q = t\} & , \text{ falls } \rho r = r, \\ \{x_{r^1}(t) | t \in \mathbb{F} \text{ und } t^{q^3} = t\} & , \text{ sonst} \end{cases} \quad (2.11)$$

die *Wurzeluntergruppe* zur Wurzel r^1 von $G = \mathbf{G}^F$. (Meistens werden wir im Folgenden den Exponenten F weglassen, wenn aus dem Kontext ersichtlich ist, ob die Wurzeluntergruppen der algebraischen Gruppe $\mathbf{G}$ oder der endlichen Gruppe G gemeint sind.) Wegen $x_{r^1}(t_1 + t_2) = x_{r^1}(t_1)x_{r^1}(t_2)$ für $r \in \Phi$ und $t_1, t_2 \in \mathbb{F}$ ist X_{r^1} isomorph zur additiven Gruppe von $\mathbb{F}_q$, falls $\rho r = r$, bzw. isomorph zur additiven Gruppe von $\mathbb{F}_{q^3}$, falls $\rho r \neq r$. Hiermit lässt sich dann auch eine Beschreibung von $\mathbf{U}^F$ formulieren:

$$\mathbf{U}^F = X_\alpha X_\beta X_{\alpha+\beta} X_{2\alpha+\beta} X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}. \quad (2.12)$$

Man erhält auch noch eine Beschreibung des *maximalen Torus* $T := \mathbf{T}^F$ von $\mathbf{G}^F$. Die Elemente in $\mathbf{T}^F$ sind genau die Elemente der Form

$$h(t_1, t_2) := h_{r_1}(t_1)h_{r_2}(t_2)h_{r_3}(t_1^q)h_{r_4}(t_1^{q^2}) \quad (2.13)$$

mit $t_1, t_2 \in \mathbb{F}$ und $t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1$.

Die Operation von $\mathbf{T}^F$ auf den Wurzeluntergruppen können wir mit (2.8) explizit berechnen. Für $t_1, t_2 \in \mathbb{F}$ mit $t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1$ und $u \in \mathbb{F}_{q^3} \subseteq \mathbb{F}$ bzw. $F_q \subseteq \mathbb{F}$ je nach Parameterbereich der entsprechenden Wurzeluntergruppe von $\mathbf{G}^F$ erhält man:

$$\begin{aligned} h(t_1, t_2)^{-1} x_\alpha(u) h(t_1, t_2) &= x_\alpha(t_1^{-2} t_2 u), \\ h(t_1, t_2)^{-1} x_\beta(u) h(t_1, t_2) &= x_\beta(t_1^{q^2+q+1} t_2^{-2} u), \\ h(t_1, t_2)^{-1} x_{\alpha+\beta}(u) h(t_1, t_2) &= x_{\alpha+\beta}(t_1^{q^2+q-1} t_2^{-1} u), \\ h(t_1, t_2)^{-1} x_{2\alpha+\beta}(u) h(t_1, t_2) &= x_{2\alpha+\beta}(t_1^{q^2-q-1} u), \\ h(t_1, t_2)^{-1} x_{3\alpha+\beta}(u) h(t_1, t_2) &= x_{3\alpha+\beta}(t_1^{-q^2-q-1} t_2 u), \\ h(t_1, t_2)^{-1} x_{3\alpha+2\beta}(u) h(t_1, t_2) &= x_{3\alpha+2\beta}(t_2^{-1} u). \end{aligned}$$

Tabelle 2.2: Operation von $\mathbf{T}^F$ auf den Wurzeluntergruppen

Als nächstes sollen Kommutatorrelationen für die Wurzeluntergruppen von $\mathbf{G}^F$ aufgestellt werden. Diese ergeben sich aus den entsprechenden Relationen in $\mathbf{G}$ und der Definition der Elemente $x_{r^1}(t)$. Für $[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy$ und $t, u \in \mathbb{F}_{q^3} \subseteq \mathbb{F}$ bzw. $F_q \subseteq \mathbb{F}$ je nach Parameterbereich der entsprechenden Wurzeluntergruppe von $\mathbf{G}^F$ erhält man:

$$\begin{aligned} [x_\beta(t), x_{3\alpha+\beta}(u)] &= x_{3\alpha+2\beta}(-tu), \\ [x_\alpha(t), x_{2\alpha+\beta}(u)] &= x_{3\alpha+\beta}(-t^{q^2}u - t^q u^{q^2} - tu^q), \\ [x_\alpha(t), x_{\alpha+\beta}(u)] &= x_{2\alpha+\beta}(-ut^q - u^q t) x_{3\alpha+\beta}(-ut^{q^2+q} - u^q t^{q^2+1} - u^{q^2} t^{q+1}) \cdot \\ &\quad x_{3\alpha+2\beta}(-u^{q^2+q}t - u^{q^2+1}t^q - u^{q+1}t^{q^2}), \\ [x_\alpha(t), x_\beta(u)] &= x_{\alpha+\beta}(ut) x_{2\alpha+\beta}(ut^{q+1}) x_{3\alpha+\beta}(ut^{q^2+q+1}) \cdot \\ &\quad x_{3\alpha+2\beta}(2u^2 t^{q^2+q+1}), \\ [x_{\alpha+\beta}(t), x_{2\alpha+\beta}(u)] &= x_{3\alpha+2\beta}(-u^q t - u^{q^2} t^q - ut^{q^2}). \end{aligned}$$

Tabelle 2.3: Kommutatorrelationen in ${}^3D_4(q)$

Alle Paare von Wurzeluntergruppen zu Wurzelpaaren, die nicht in dieser Tabelle aufgeführt sind, vertauschen miteinander. Zum Beweis dieser Relationen hat man nur die vereinfachten Kommutatorrelationen (2.4) und die Strukturkonstanten aus Tabelle A.1 aus dem Anhang zu betrachten.

Der Normalisator $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ wird von $\mathbf{T}$ und den Elementen $n_r := x_r(1)x_{-r}(-1)x_r(1)$ für $r \in \Phi$ erzeugt. Für $N := N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})^F$ können wir eine analoge Beschreibung geben. Hierzu definieren wir für $r \in \Phi$:

$$n_{r^1} := \begin{cases} n_r & , \text{ falls } \rho r = r, \\ n_r n_{\rho r} n_{\rho^2 r} & , \text{ sonst.} \end{cases} \quad (2.14)$$

Dann ist $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})^F$ das Erzeugnis von $\mathbf{T}^F$ und den $n_{r,1}$ für $r \in \Phi$. Wie definieren die Weylgruppe W von $G = \mathbf{G}^F$ als die Weylgruppe des Wurzelsystems Φ vom Typ G_2 . Dann ist W isomorph zur Diedergruppe der Ordnung 12, und es gilt: $W \cong N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})^F / \mathbf{T}^F$.

Die Operation der Elemente n_r für $r \in \Phi$ auf den Wurzeluntergruppen kennen wir bereits aus Bemerkung 1.9.3, (c). Die dort auftretenden η_{rs} sind stets ± 1 und können aus den Strukturkonstanten N_{rs} berechnet werden.

Damit können wir schließlich die Operation von n_α und n_β auf den $X_{r,1}^F$ für positives $r \in \Phi$ berechnen. Für $t \in \mathbb{F}_{q^3} \subseteq \mathbb{F}$ bzw. $\mathbb{F}_q \subseteq \mathbb{F}$ je nach Parameterbereich der entsprechenden Wurzeluntergruppe von $\mathbf{G}^F$ ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 n_\alpha^{-1} x_\alpha(t) n_\alpha &= x_{-\alpha}(-t), \\
 n_\alpha^{-1} x_\beta(t) n_\alpha &= x_{3\alpha+\beta}(-t), \\
 n_\alpha^{-1} x_{\alpha+\beta}(t) n_\alpha &= x_{2\alpha+\beta}(-t^{q^2}), \\
 n_\alpha^{-1} x_{2\alpha+\beta}(t) n_\alpha &= x_{\alpha+\beta}(t^q), \\
 n_\alpha^{-1} x_{3\alpha+\beta}(t) n_\alpha &= x_\beta(t), \\
 n_\alpha^{-1} x_{3\alpha+2\beta}(t) n_\alpha &= x_{3\alpha+2\beta}(t), \\
 n_\beta^{-1} x_\alpha(t) n_\beta &= x_{\alpha+\beta}(t), \\
 n_\beta^{-1} x_\beta(t) n_\beta &= x_{-\beta}(-t), \\
 n_\beta^{-1} x_{\alpha+\beta}(t) n_\beta &= x_\alpha(-t), \\
 n_\beta^{-1} x_{2\alpha+\beta}(t) n_\beta &= x_{2\alpha+\beta}(t), \\
 n_\beta^{-1} x_{3\alpha+\beta}(t) n_\beta &= x_{3\alpha+2\beta}(t), \\
 n_\beta^{-1} x_{3\alpha+2\beta}(t) n_\beta &= x_{3\alpha+\beta}(-t),
 \end{aligned}$$

Tabelle 2.4: Operation der Weylgruppe auf den Wurzeluntergruppen

Damit haben wir alle Informationen, die wir benötigen, um Berechnungen in den Trialitätsgruppen ${}^3D_4(q)$ und der zugrundeliegenden algebraischen Gruppe $\mathbf{G}$ durchführen zu können.

Kapitel 3

Konjugiertenklassen parabolischer Untergruppen

Als endliche Gruppen vom Lie-Typ besitzen die Steinbergschen Trialitätsgruppen ein BN -Paar. In allen Gruppen mit BN -Paar gibt es gewisse ausgezeichnete Untergruppen, die sogenannten parabolischen Untergruppen. Diese Untergruppen bilden ein wichtiges Werkzeug bei der Analyse der Struktur und Darstellungen endlicher Gruppen vom Lie-Typ.

Bei der Betrachtung der Trialitätsgruppen ${}^3D_4(q)$ setzen wir von nun an stets voraus, dass q ungerade ist. Da q eine Potenz einer Primzahl p ist, ist dies äquivalent dazu, dass p eine gute Primzahl für das Wurzelsystem vom Typ D_4 ist. Unter dieser Voraussetzung beginnen wir in diesem Kapitel mit den Vorbereitungen zur Bestimmung der generischen Charaktertafeln zweier maximaler parabolischer Untergruppen P und Q von ${}^3D_4(q)$. Eine wesentliche Ingredienz zur Bestimmung von Charaktertafeln ist die Kenntnis der Konjugiertenklassen.

In diesem Kapitel beschreiben wir zunächst noch einmal kurz die Konjugiertenklassen von ${}^3D_4(q)$ sowie einer Boreluntergruppe B . Der größte Teil dieses Kapitels widmet sich dann der Berechnung und Parametrisierung der Konjugiertenklassen von P und Q sowie deren Fusionen in ${}^3D_4(q)$. Diese Fusionen werden später insbesondere zum Einschränken irreduzibler Charaktere von ${}^3D_4(q)$ auf P bzw. Q benötigt.

Die hier vorgestellten und benutzten Methoden lassen sich prinzipiell auch allgemeiner zur Berechnung von Konjugiertenklassen parabolischer Untergruppen in beliebigen endlichen Gruppen vom Lie-Typ verwenden.

3.1 Konjugiertenklassen von ${}^3D_4(q)$

Von nun an setzen wir stets voraus, dass q ungerade, also p eine gute Primzahl für das Wurzelsystem vom Typ D_4 ist. In diesem Abschnitt sollen der Vollständigkeit halber noch einmal kurz die Konjugiertenklassen von ${}^3D_4(q)$ beschrieben werden. Wir folgen hierbei den Beschreibungen der Konjugiertenklassen in Geck [19], Spaltenstein [39] und Deriziotis–Michler [14]. Wir behalten die Bezeichnungen aus Kapitel 2 bei.

Maximale Tori

Die maximalen Tori von $G = \mathbf{G}^F$ sind per Definition die Gruppen der Fixpunkte rationaler maximaler Tori $\tilde{\mathbf{T}}$ von $\mathbf{G}$ unter F . Der Isomorphietyp von $\tilde{\mathbf{T}}^F$ hängt nur von der G –Konjugiertenklasse von $\tilde{\mathbf{T}}$ ab. Um einen Überblick über die G –Konjugiertenklassen rationaler maximaler Tori zu bekommen, verwenden wir den in Abschnitt 2.3 definierten maximal zerfallenden Torus $\mathbf{T}$ als Referenztorus.

Jeder rationale maximale Torus $\tilde{\mathbf{T}}$ lässt sich in der algebraischen Gruppe in den Torus $\mathbf{T}$ konjugieren; sei etwa $g \in \mathbf{G}$ mit $\tilde{\mathbf{T}}^g = \mathbf{T}$. Dann ist $n := g^{-1}F(g) \in N(\mathbf{T})$, und die Operation des Frobeniusmorphisms auf $\tilde{\mathbf{T}}$ entspricht auf $\mathbf{T}$ der Operation $(Fn^{-1}) : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$, $t \mapsto {}^nF(t)$ (denn es gilt $F(\tilde{t})^g = {}^nF(\tilde{t}^g)$). Da $\mathbf{T}$ abelsch ist, ist diese Operation schon durch die Restklasse $w := n\mathbf{T} \in \mathbf{W} = N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ in der Weylgruppe bezüglich $\mathbf{T}$ festgelegt. Wir schreiben auch $(Fw^{-1}) : \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}$, $t \mapsto {}^wF(t)$, und nennen dies den *mit w getwisteten Frobeniusmorphismus* von $\mathbf{T}$. Wir sagen, dass $\tilde{\mathbf{T}}$ aus $\mathbf{T}$ durch *Twisten mit w* entsteht.

Zwei rationale maximale Tori $\tilde{\mathbf{T}}_1, \tilde{\mathbf{T}}_2$ mit $\tilde{\mathbf{T}}_i^{g_i} = \mathbf{T}$, $w_i = g_i^{-1}F(g_i)\mathbf{T} \in \mathbf{W}$, $i = 1, 2$, sind genau dann G –konjugiert, wenn w_1 und w_2 in der gleichen F –Konjugiertenklasse liegen, d.h. wenn es ein $v \in \mathbf{W}$ mit $w_1 = vw_2F(v^{-1})$ gibt (siehe etwa Digne–Michel [15], 3.23). Wir können also die G –Konjugiertenklassen rationaler maximaler Tori von $\mathbf{G}$ beschreiben, indem wir aus jeder F –Konjugiertenklasse von $\mathbf{W}$ ein Element w auswählen und dann die Fixpunktmenge $\mathbf{T}^{(Fw^{-1})}$ berechnen.

Zur Parametrisierung der Elemente der maximalen Tori von G erinnern wir daran, dass jedes Element $h \in \mathbf{T}$ in der Form

$$h = h(t_1, t_2, t_3, t_4) = \prod_{i=1}^4 h_{r_i}(t_i) \quad (3.1)$$

mit $t_i \in \mathbb{F}^\times$, $i = 1, \dots, 4$, geschrieben werden kann (vergleiche (2.5)).

Die Operation der Erzeuger w_{r_i} , $i = 1, \dots, 4$ von $\mathbf{W}$ ist in Tabelle A.2 im Anhang angegeben. Die Werte in dieser Tabelle lassen sich mittels Bemerkung 1.9.3, (c) und (2.6)

berechnen. Die von uns benötigten Informationen über die F -Konjugiertenklassen von $\mathbf{W}$ sind in Tabelle A.3 im Anhang zusammengestellt. Die Werte in dieser Tabelle können aus Tafel 3.6.2 in Geck [19] und Table 1.1 in Deriziotis–Michler [14] abgelesen werden. Aus den Tabellen A.2 und A.3 lassen sich dann die Fixpunktmenzen $\mathbf{T}^{(Fw_i^{-1})}$ berechnen. Die Ergebnisse findet man in Tabelle A.4 im Anhang. Insbesondere besitzt G bis auf G -Konjugation genau 7 maximale Tori.

Für spätere Anwendungen halten wir noch fest:

3.1.1 Bemerkung

- (a) Der maximale Torus $\mathbf{T}_2$ entsteht aus $\mathbf{T}$ durch Twisten mit dem Weylgruppenelement $w_\alpha := w_{r_1}w_{r_3}w_{r_4}$.
- (b) Der maximale Torus $\mathbf{T}_1$ entsteht aus $\mathbf{T}$ durch Twisten mit dem Weylgruppenelement $w_\beta := w_{r_2}$.

Halbeinfache Konjugiertenklassen

Die Anzahl der halbeinfachen Konjugiertenklassen von $\mathbf{G}^F$ wächst mit q , hängt also vom speziellen F ab. Um diese Klassen für alle q in einheitlicher Weise beschreiben zu können, müssen sie geeignet zusammengefasst werden. Hierzu hat sich der Begriff des halbeinfachen Klassentyps bewährt (vergleiche Lübeck [34]). Wir formulieren ihn etwas allgemeiner für parabolische Untergruppen:

3.1.2 Definition

Es sei $\mathbf{P}$ eine F -stabile parabolische Untergruppe von $\mathbf{G}$. Zwei halbeinfache Elemente $s_1, s_2 \in \mathbf{P}^F$ liegen im gleichen *halbeinfachen Klassentyp* von $\mathbf{P}^F$, wenn ihre Zentralisatoren $C_{\mathbf{P}}(s_1)$ und $C_{\mathbf{P}}(s_2)$ in $\mathbf{P}^F$ konjugiert sind.

Offensichtlich ist jeder halbeinfache Klassentyp von $\mathbf{G}^F$ eine Vereinigung von Konjugiertenklassen von $\mathbf{G}^F$. Deriziotis und Michler haben die halbeinfachen Klassentypen für $\mathbf{G}^F = {}^3D_4(q)$ ausgerechnet. In ${}^3D_4(q)$ gibt es genau 15 halbeinfache Klassentypen, die wir mit $h_1, h_2, \dots, h_{15}$ bezeichnen wollen. (Der halbeinfache Klassentyp h_i in der hier gewählten Bezeichnung entspricht dem halbeinfachen Klassentyp s_i , $i = 1, \dots, 15$ in der Notation von Deriziotis–Michler [14] und Geck [19].) In späteren Teilen dieser Arbeit werden wir auch Konjugiertenklassen einiger Untergruppen von G betrachten. Wenn wir betonen wollen, dass der halbeinfache Klassentyp h_i eine Vereinigung von Konjugiertenklassen in G bezeichnet, so schreiben wir auch h_i^G .

Für jeden halbeinfachen Klassentyp wollen wir nun Vertreter der zugehörigen halbeinfachen Konjugiertenklassen angeben. Es seien $s_1, s_2 \in \mathbf{G}^F$ zwei halbeinfache Elemente mit

gleichem halbeinfachem Klassentyp. Nach Konjugation in $\mathbf{G}^F$ darf man annehmen, dass $C := C_{\mathbf{G}}(s_1) = C_{\mathbf{G}}(s_2)$ ist. Die Elemente s_1 und s_2 liegen jeweils in einem rationalen maximalen Torus von C (das folgt beispielsweise aus Corollary 3.16 in Digne–Michel [15]). Andererseits sind s_1 und s_2 zentral in C und liegen somit in allen maximalen Tori von C . Wir dürfen daher stets annehmen, dass zwei Elemente aus halbeinfachen Konjugiertenklassen von gleichem halbeinfachen Klassentyp im selben rationalen maximalen Torus enthalten sind.

Man erhält dann ein Vertretersystem der halbeinfachen Konjugiertenklassen von $\mathbf{G}^F$, indem man für jeden maximalen Torus $\mathbf{T}_i^F$, $i = 0, \dots, 6$ (vergleiche Tabelle A.4) die Bahnen von $\mathbf{W}_i := C_{\mathbf{W},F}(w_i) = \{w \in \mathbf{W} \mid w^{-1}w_iF(w) = w_i\}$ auf $\mathbf{T}_i^F$ berechnet. Die Ergebnisse sind in Tabelle A.5 im Anhang zusammengefasst (vergleiche auch Tafel 3.6.3 in Geck [19]).

Parametrisierung der halbeinfachen Klassen

Zur Parametrisierung der halbeinfachen Konjugiertenklassen legen wir einige Notationen fest. Wir betrachten die Gruppen $\mathbb{F}^\times$ und $\mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$, wobei $\mathbb{Q}_{p'}$ die additive Gruppe der rationalen Zahlen bezeichne, die sich mit nicht durch p teilbarem Nenner schreiben lassen. Diese beiden Gruppen sind isomorph, und es sei ein Isomorphismus $\varphi_1 : \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}^\times$ für den Rest dieser Arbeit fest gewählt (vergleiche Carter [7], 3.1.3). Die Elemente von $\mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ sollen mittels Repräsentanten $\frac{r}{s}$, $r, s \in \mathbb{Z}$, $s \neq 0$, $p \nmid s$, in $\mathbb{Q}_{p'}$ geschrieben werden. Wir vereinbaren:

3.1.3 Schreibweise

- (a) Wir verwenden ϕ_i als abkürzenden Schreibweise für das i -te Kreisteilungspolynom in der Variablen q (wie in Carter [7], 13.9). Hier kommen vor:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= q - 1 \\ \phi_2 &= q + 1 \\ \phi_3 &= q^2 + q + 1 \\ \phi_6 &= q^2 - q + 1 \\ \phi_{12} &= q^4 - q^2 + 1 \end{aligned}$$

- (b) Es sei $\varphi_1 : \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \mathbb{F}^\times$ die oben erklärte Abbildung. In Tabelle 3.1 werden für einige Elemente aus $\mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ Namen ihrer Bilder unter φ_1 festgelegt. Diese Namen sollen im Rest der Arbeit benutzt werden, um Elemente aus $\mathbb{F}^\times$ explizit hinzuschreiben.

Mit Hilfe dieser Notationen lassen sich nun die Vertreter der halbeinfachen Konjugiertenklassen von ${}^3D_4(q) = \mathbf{G}^F$ aus Tabelle A.5 parametrisieren. Das Ergebnis ist im Anhang in Tabelle A.6 zusammengefasst.

$\mu \in \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$	$\varphi_1(\mu) \in \mathbb{F}^\times$
$\frac{1}{q^n-1}$	$\tilde{\zeta}_n$
$\frac{1}{q^n+1}$	$\tilde{\xi}_n$
$\frac{1}{(q^n+1)(q-1)}$	$\tilde{\eta}_n$
$\frac{1}{(q^n-1)(q+1)}$	$\tilde{\mu}_n$
$\frac{1}{\phi_n}$	$\tilde{\varphi}_n$

Tabelle 3.1: Notation für generische Einheitswurzeln

Unipotente Konjugiertenklassen

Ein Vertretersystem für die unipotenten Konjugiertenklassen von $G := {}^3D_4(q) = \mathbf{G}^F$ lässt sich so bestimmen wie es in Abschnitt 3.5 in Geck [19] beschrieben ist. Das Ergebnis ist in Tabelle 3.2 dargestellt.

Bezeichnung	Bezeichnung in Geck [19]	Repräsentant u	$ C_G(u) $
$c_{1,0}$	$\emptyset$	1	$ \mathbf{G}^F $
$c_{1,1}$	A_1	$x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q^{12}(q^6-1)$
$c_{1,2}$	$3A_1$	$x_\alpha(1)$	$q^{10}(q^2-1)$
$c_{1,3}$	A'_2	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(-1)$	$2q^8(q^2+q+1)$
$c_{1,4}$	A''_2	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(-\zeta)$	$2q^8(q^2-q+1)$
$c_{1,5}$	$D_4(a_1)$	$x_\alpha(1)x_{\alpha+\beta}(a)$	q^6
$c_{1,6}$	D_4	$x_\alpha(1)x_\beta(1)$	q^4

 Tabelle 3.2: Unipotente Konjugiertenklassen von ${}^3D_4(q)$, q ungerade

Die erste Spalte der Tabelle enthält die in der vorliegenden Arbeit benutzte Bezeichnung der unipotenten Konjugiertenklassen. Zur Motivation der hier gewählten Bezeichnung vergleiche man den nächsten Abschnitt über die gemischten Klassen. Der zweiten Spalte der Tabelle 3.2 kann man die in Geck [19] bzw. Spaltenstein [39] benutzte Bezeichnung ent-

nehmen. Die dritte Spalte gibt Vertreter der unipotenten Konjugiertenklassen von ${}^3D_4(q)$ an. Hierbei sind $\zeta \in \mathbb{F}_q \subseteq \mathbb{F}$ ein Nichtquadrat und $a \in \mathbb{F}$ mit $a^{q^3} = a$, $a^q \neq a$. Man beachte, dass für die Konjugiertenklasse $c_{1,1}$ ein anderer Vertreter als in Geck [19] gewählt wurde. Die letzte Spalte schließlich enthält die Zentralisatorordnungen wie sie etwa Tafel 3.5.2 in Geck [19] entnommen werden können.

Gemischte Klassen

Um eine vollständige Liste der Konjugiertenklassen von ${}^3D_4(q) = \mathbf{G}^F$ zu bekommen, müssen wir die unipotenten Konjugiertenklassen der Zentralisatoren der halbeinfachen Elemente von ${}^3D_4(q) = \mathbf{G}^F$ bestimmen. Diese sind auch schon von Geck in [19] und Deriziotis und Michler in [14] bestimmt worden. Da in diesen Arbeiten jedoch keine Vertreter dieser Konjugiertenklassen angegeben werden, wollen wir an dieser Stelle die dazu notwendigen Berechnungen kurz skizzieren.

Wir bestimmen die unipotenten Konjugiertenklassen der Zentralisatoren der halbeinfachen Elemente des halbeinfachen Klassentyps h_9 . Die unipotenten Konjugiertenklassen der Zentralisatoren der halbeinfachen Elemente der anderen halbeinfachen Klassentypen lassen sich analog – meist sogar deutlich einfacher – ausrechnen.

Es sei $s' \in \mathbf{G}^F$ ein halbeinfaches Element, dessen Konjugiertenklasse zum halbeinfachen Klassentyp h_9 gehört. Das Element s' liegt in einem rationalen maximalen Torus $\tilde{\mathbf{T}}$ von $\mathbf{G}$ (3.16 in Digne–Michel [15]). Dazu gibt es ein $g \in \mathbf{G}$ mit $\tilde{\mathbf{T}}^g = \mathbf{T}$. Für dieses ist $n := g^{-1}F(g) \in N(\mathbf{T})$, und wir schreiben $w := n\mathbf{T} \in \mathbf{W} = N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$. Da die Konjugiertenklasse von s' zum halbeinfachen Klassentyp h_9 gehört, folgt aus den Tabellen A.3, A.4 und A.5 im Anhang, dass wir $w = w_{r_1}w_{r_3}w_{r_4} = w_\alpha$ und $n = n_{r_1}n_{r_3}n_{r_4} = n_\alpha$ annehmen dürfen (vergleiche auch Bemerkung 3.1.1). Das Element $s'' := (s')^g \in \mathbf{T}$ hat dann die Form

$$s'' = h(t, 1, t^{-q}, t^{q-1}) \text{ für ein } t \in \mathbb{F} \text{ mit } t^{q^2-q+1} = 1, t \neq 1.$$

Die Operation von F auf $C_{\mathbf{G}}(s')$ entspricht der Operation des getwisteten Frobeniusmorphisms (Fn^{-1}) auf $C_{\mathbf{G}}(s'')$, denn für $x \in \mathbf{G}$ ist $F(x)^g = F(x^g)^{F(g^{-1})g} = {}^nF(x^g)$. Für den Zentralisator von s' in $\mathbf{G}^F$ gilt also:

$$\begin{aligned} (C_{\mathbf{G}}(s')^F)^g &= \{x \in C_{\mathbf{G}}((s')^g) \mid F(gx) = gx\} \\ &= \{x \in C_{\mathbf{G}}(s'') \mid {}^{g^{-1}F(g)}F(x) = x\} = C_{\mathbf{G}}(s'')^{(Fn^{-1})}. \end{aligned}$$

Mit anderen Worten: $C_{\mathbf{G}}(s'')^{(Fn^{-1})}$ ist ein $\mathbf{G}$ -Konjugiertes von $C_{\mathbf{G}}(s')^F$. Zur Bestimmung der Ordnung und der unipotenten Konjugiertenklassen von $C_{\mathbf{G}}(s')^F$, genügt es also, die Ordnung und die unipotenten Konjugiertenklassen von $C_{\mathbf{G}}(s'')^{(Fn^{-1})}$ zu berechnen.

Wir beginnen mit der Bestimmung von $C_{\mathbf{G}}(s'')^{(Fn^{-1})}$. Wie in Anhang A.1 beschrieben nummerieren wir die positiven Wurzeln von Φ mit $r_1, \dots, r_{12}$. Es sei $x \in C_{\mathbf{G}}(s'')^{(Fn^{-1})}$ mit

Bruhat-Zerlegung $x = u'_x n_x h_x u_x$. Aus der Eindeutigkeit der Bruhat-Zerlegung in $\mathbf{G}$ folgt dann zunächst: $u'_x, n_x, h_x, u_x \in C_{\mathbf{G}}(s'')$. Insbesondere gilt: $u'_x, u_x \in \mathbf{U} \cap C_{\mathbf{G}}(s'')$. Wegen $\mathbf{U} \cap C_{\mathbf{G}}(s'') = X_{r_2} X_{r_{11}} X_{r_{12}}$ ist $\mathbf{U} \cap C_{\mathbf{G}}(s'')$ invariant unter (Fn^{-1}) . Da außerdem $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ und $\mathbf{T}$ invariant unter (Fn^{-1}) sind, folgt hieraus nun:

$$u_x^{(Fn^{-1})} = u'_x, (n_x h_x)^{(Fn^{-1})} = n_x h_x \text{ und } u_x^{(Fn^{-1})} = u_x.$$

Die Fixpunkte in $\mathbf{U} \cap C_{\mathbf{G}}(s'') = X_{r_2} X_{r_{11}} X_{r_{12}}$ und $N_{\mathbf{G}}(\mathbf{T})$ unter (Fn^{-1}) kann man explizit ausrechnen. Man erhält: Die Elemente in $C_{\mathbf{G}}(s'')^{(Fn^{-1})}$ sind genau die Elemente der Form

$$h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2}) x_{\beta}(s) x_{3\alpha+\beta}(s^q) x_{3\alpha+2\beta}(r) \quad (3.2)$$

und

$$x_{\beta}(\tilde{s}) x_{3\alpha+\beta}(\tilde{s}^q) x_{3\alpha+2\beta}(\tilde{r}) n_{r_{12}} h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2}) x_{\beta}(s) x_{3\alpha+\beta}(s^q) x_{3\alpha+2\beta}(r) \quad (3.3)$$

mit $r, s, t \in \mathbb{F}$, $t^{(q^3+1)(q-1)} = 1$ sowie $s, \tilde{s}$ Nullstellen des Polynoms $X^{q^2} + X$, r Nullstelle des Polynoms $X^q - X - s^{q^2+q}$ und $\tilde{r}$ Nullstelle des Polynoms $X^q - X - \tilde{s}^{q^2+q}$. Damit haben wir eine explizite Beschreibung von $C_{\mathbf{G}}(s'')^{(Fn^{-1})}$. Insbesondere folgt:

$$|C_{\mathbf{G}}(s'')^{(Fn^{-1})}| = q^3(q^3 + 1)(q - 1) + q^6(q^3 + 1)(q - 1) = q^3(q^3 + 1)^2(q - 1).$$

Nun bestimmen wir die unipotenten Konjugiertenklassen von $C_{\mathbf{G}}(s'')^{(Fn^{-1})}$. Aus Table 2.4 in Deriziotis und Michler [14] kann man ablesen, dass es in $C_{\mathbf{G}}(s'')^{(Fn^{-1})}$ genau zwei nichttriviale unipotente Konjugiertenklassen gibt.

Wir setzen:

$$\begin{aligned} x_1 &:= x_{3\alpha+2\beta}(1), \\ x_2 &:= x_{\beta}(s) x_{3\alpha+\beta}(s^q) x_{3\alpha+2\beta}(r), \end{aligned}$$

wobei $s \in \mathbb{F}$ eine primitive $2(q^2 - 1)$ -te Einheitswurzel und $r \in \mathbb{F}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^q - X + s^{q^2+1}$ sei. Dann sind x_1 und x_2 unipotente Elemente in $C_{\mathbf{G}}(s'')^{(Fn^{-1})}$. Wie man durch Konjugation mit Elementen der Form (3.2) und (3.3) nachrechnet, gilt für die Zentralisatorordnungen von x_1 und x_2 in $C_{\mathbf{G}}(s'')^{(Fn^{-1})}$:

$$|C_{C_{\mathbf{G}}(s'')^{(Fn^{-1})}}(x_1)| = q^3(q^3 + 1)$$

bzw.

$$|C_{C_{\mathbf{G}}(s'')^{(Fn^{-1})}}(x_2)| = q^2(q^2 - q + 1).$$

Damit haben wir also Repräsentanten für die beiden nichttrivialen unipotenten Konjugiertenklassen von $C_{\mathbf{G}}(s'')^{(Fn^{-1})}$ und die zugehörigen Zentralisatorordnungen gefunden.

Name	Repräsentant	$ C_{3D_4(q)} $
$c_{9,0}$	h_9	$q^3(q^3 + 1)^2(q - 1)$
$c_{9,1}$	$h_9 x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q^3(q^3 + 1)$
$c_{9,2}$	$h_9 x_\beta(s) x_{3\alpha+\beta}(s^q) x_{3\alpha+2\beta}(r)$	$q^2(q^2 - q + 1)$

Tabelle 3.3: Die gemischten Klassen zum halbeinfachen Klassentyp h_9

Zusammenfassend erhält man somit: Die Konjugiertenklassen von ${}^3D_4(q) = \mathbf{G}^F$, deren Repräsentanten die Eigenschaft haben, dass ihr halbeinfacher Anteil den halbeinfachen Klassentyp h_9 besitzt, sind durch Tabelle 3.3 gegeben. In der Tabelle ist $s \in \mathbb{F}$ eine primitive $2(q^2 - 1)$ -te Einheitswurzel und $r \in \mathbb{F}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^q - X + s^{q+1}$.

Die übrigen gemischten Konjugiertenklassen von ${}^3D_4(q) = \mathbf{G}^F$ lassen sich auf analoge Weise – meist sogar erheblich einfacher – bestimmen. Eine vollständige Liste der Konjugiertenklassen ist in Tabelle A.7 im Anhang gegeben.

Zu den hier gewählten Bezeichnungen der Konjugiertenklassen ist folgendes zu sagen: Wir haben zu jedem halbeinfachen Klassentyp h_i von $\mathbf{G}^F$ Repräsentanten angegeben (Tabelle A.6). Die Zentralisatoren dieser Repräsentanten seien für den Moment mit $\mathbf{C}_{\mathbf{G}^F}^{(Fn^{-1})}$ bezeichnet. In Tabelle A.7 ist nun für jede unipotente Klasse von $\mathbf{C}_{\mathbf{G}^F}^{(Fn^{-1})}$ mit Vertreter u eine Zeile eingetragen, die zu den Klassen mit Repräsentant su gehört, wobei s Repräsentant einer Klasse des halbeinfachen Klassentyps h_i aus Tabelle A.6 sei. Wir wollen (Lübeck [34] folgend) eine solche Familie von Klassen einen *Klassentyp* nennen. Da unsere Vertreter halbeinfacher Klassen im Allgemeinen nicht in $\mathbf{G}^F$ liegen, gilt dies auch für die su . Ein Vertreter der Klasse von su , der in $\mathbf{G}^F$ liegt, ist ${}^g su$, falls $g^{-1}F(g) = n$ ist. Wir bezeichnen die Klassentypen mit

$$c_{i,j},$$

falls der halbeinfache Anteil zum halbeinfachen Klassentyp h_i gehört. Mit dem zweiten Index j werden die unipotenten Klassen von $\mathbf{C}^{(Fn^{-1})}$ durchgezählt, die nach fallender Zentralisatorordnung sortiert sind. Dabei beginnen wir immer mit $j = 0$, so dass $c_{i,0}$ für die halbeinfachen Klassen des Typs h_i steht. Wenn wir die Klassen in einem Klassentyp genauer bezeichnen wollen, schreiben wir $c_{i,j}(i_1, \dots)$, wobei die Parameter sich auf den halbeinfachen Anteil beziehen, wie in Tabelle A.6 festgelegt.

In späteren Teilen dieser Arbeit werden wir auch Konjugiertenklassen einiger Untergruppen von $G = \mathbf{G}^F$ betrachten. Wenn wir betonen wollen, dass der Klassentyp $c_{i,j}$ Konjugiertenklassen in G bezeichnet, so schreiben wir auch

$$c_{i,j}^G.$$

3.2 Konjugiertenklassen einer Boreluntergruppe

Wir behalten die Bezeichnungen aus Kapitel 2 bei. Auch in diesem Abschnitt sei weiterhin $\mathbf{G}^F = {}^3D_4(q)$, wobei wir die Voraussetzung beibehalten, dass q ungerade ist. Es sei $\mathbf{B}$ die Standard-Borel-Untergruppe

$$\mathbf{B} := \mathbf{T}\mathbf{U}$$

von $\mathbf{G}$, und es sei $\mathbf{B}^F$ die zugehörige Standard-Borel-Untergruppe von $\mathbf{G}^F$. Zur Abkürzung setzen wir wieder

$$\begin{aligned} G &:= \mathbf{G}^F, \\ B &:= \mathbf{B}^F, \\ U &:= \mathbf{U}^F, \\ T &:= \mathbf{T}^F. \end{aligned}$$

Dann zerfällt B in das semidirekte Produkt

$$B = T \ltimes U.$$

Die Ordnung von $B = \mathbf{B}^F$ ist:

$$|B| = |\mathbf{B}^F| = q^{12}(q^3 - 1)(q - 1).$$

Halbeinfache Konjugiertenklassen

Weil $B = T \ltimes U$ ein semidirektes Produkt und T abelsch ist, bilden die Elemente aus T ein Vertretersystem für die halbeinfachen Konjugiertenklassen von B . Die halbeinfachen Klassentypen von $\mathbf{B}^F$ wurden bereits in Geck [19] bestimmt. In $\mathbf{B}^F$ gibt es genau 12 halbeinfache Klassentypen, die wir mit $h_1, \dots, h_{12}$ bezeichnen wollen. Um die halbeinfachen Klassentypen von $\mathbf{B}^F$ von den zu $\mathbf{G}^F$ gehörigen zu unterscheiden, werden wir gelegentlich auch h_i^B bzw. h_i^G schreiben. Vertreter für die halbeinfachen Konjugiertenklassen von B können der Tafel 3.8.2 in Geck [19] entnommen werden. Sie sind im Anhang in Tabelle A.8 noch einmal zusammengestellt.

Parametrisierung der halbeinfachen Klassen

Die Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von $\mathbf{B}^F$ nehmen wir analog zur Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von $\mathbf{G}^F$ vor. Die Vertreter und Parameterbereiche sind in Tabelle A.9 im Anhang aufgeführt.

Unipotente Konjugiertenklassen

Ein Vertretersystem für die unipotenten Konjugiertenklassen von $B := \mathbf{B}^F$ lässt sich so bestimmen wie es in Abschnitt 3.8 in Geck [19] beschrieben ist. Das Ergebnis ist in Tabelle A.10 im Anhang dargestellt.

Die erste Spalte dieser Tabelle enthält die in der vorliegenden Arbeit benutzten Bezeichnungen $c_{i,j}$ der unipotenten Konjugiertenklassen von $\mathbf{B}^F$. Die hier gewählten Bezeichnungen überschneiden sich teilweise mit den Bezeichnungen der unipotenten Konjugiertenklassen von $\mathbf{G}^F$. Wenn wir betonen wollen, dass wir mit $c_{i,j}$ eine unipotente Klasse von B bzw. von G meinen, dann schreiben wir auch $c_{i,j}^B$ bzw. $c_{i,j}^G$. Zur Motivation der hier gewählten Bezeichnungen vergleiche man auch den nächsten Abschnitt über die gemischten Klassen. In der zweiten Spalte der Tabelle A.10 sind die entsprechenden Bezeichnungen der unipotenten Klassen aus Geck [19] aufgeführt. Die dritte Spalte enthält die zugehörigen Repräsentanten. Zu jedem $c_{i,j}$ findet man in der vierten Spalte die Anzahl der mit $c_{i,j}$ bezeichneten unipotenten Klassen. In der fünften Spalte sind die zugehörigen Zentralisatorordnungen aufgelistet.

Das in der dritten Spalte von Tabelle A.10 in den Repräsentanten auftretende ζ ist das auch schon bei den Repräsentanten von G auftretende Nichtquadrat $\zeta \in \mathbb{F}$ mit $\zeta^q = \zeta$ (vergleiche Abschnitt 3.1, „Unipotente Klassen“, sowie Anhang A.7).

Die $\frac{q-3}{2}$ unipotenten Klassen von $\mathbf{B}^F$, die mit $c_{1,12}$ bezeichnet werden, sind durch eine Menge

$$I_1 \subseteq \{(i, b) \mid i \in \{0, 1\}, b \in \mathbb{F}^\times, b^q = b\}$$

mit $|I_1| = \frac{q-3}{2}$ parametrisiert. Auf ähnliche Weise sind die $\frac{q-1}{2}$ unipotenten Klassen von $\mathbf{B}^F$, die mit $c_{1,16}$ bezeichnet werden, durch eine Menge

$$I_2 \subseteq \{(i, b) \mid i \in \{0, 1\}, b \in \mathbb{F}^\times, b^q = b\}$$

mit $|I_2| = \frac{q-1}{2}$ parametrisiert. Diese beiden Parametermengen I_1 und I_2 sind folgendermaßen definiert: Zunächst definieren wir auf der Menge

$$S := \{x \in \mathbb{F}^\times \mid x^q = x\}$$

eine Äquivalenzrelation. Wir nennen zwei Elemente $x, x' \in S$ äquivalent, wenn $x = x'$ oder $x = -x'$ gilt. Es sei nun S' ein Vertretersystem der zu dieser Äquivalenzrelation gehörigen Äquivalenzklassen. Es sei I die Menge aller Paare $(i, b) \in \{0, 1\} \times S'$ mit $(i, b) \neq (0, 2)$. Die Parametermenge I_1 ist dann definiert als die Menge aller Paare $(i, b) \in I$, so dass

$$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(\zeta^i)x_{3\alpha+\beta}(b) \tag{3.4}$$

in $\mathbf{G}^F$ in der Konjugiertenklasse $c_{1,3}^G$ liegt. Ein Vertretersystem für die mit $c_{1,12}$ bezeichneten unipotenten Klassen ist durch die Elemente $x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(\zeta^i)x_{3\alpha+\beta}(b)$ gegeben, wobei

(i, b) die Menge I_1 durchläuft. Wenn wir besonders betonen wollen, dass wir die unipotente Konjugiertenklasse von $\mathbf{B}^F$ mit dem Repräsentanten $x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(\zeta^i)x_{3\alpha+\beta}(b)$ meinen, so schreiben wir statt $c_{1,12}$ auch präziser

$$c_{1,12}(i, b).$$

Die Parametermenge I_2 ist nun definiert als die Menge aller Paare $(i, b) \in I - I_1$. Dies ist gleichbedeutend damit, dass $(i, b) \in I$ genau dann in I_2 liegt, wenn das Element der Form (3.4) in $\mathbf{G}^F$ in der Konjugiertenklasse $c_{1,4}^G$ liegt. Ein Vertretersystem für die mit $c_{1,16}$ bezeichneten unipotenten Klassen ist durch die Elemente $x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(\zeta^i)x_{3\alpha+\beta}(b)$ gegeben, wobei (i, b) die Menge I_2 durchläuft. Auch hier treffen wir die Konvention, dass wir statt $c_{1,16}$ präziser $c_{1,16}(i, b)$ schreiben ($(i, b) \in I_2$), falls wir besonders betonen wollen, dass wir die unipotente Konjugiertenklasse von $\mathbf{B}^F$ mit dem Repräsentanten $x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(\zeta^i)x_{3\alpha+\beta}(b)$ meinen.

Die $q + 1$ unipotenten Klassen von $\mathbf{B}^F$, die mit $c_{1,17}$ bezeichnet werden, sind durch eine Menge

$$I_3 \subseteq I' := \left\{ a' \in \mathbb{F} \mid (a')^{q^3} = a', (a')^q \neq a' \right\}$$

mit $|I_3| = q + 1$ parametrisiert. Die Parametermenge I_3 ist folgendermaßen definiert: Zunächst definieren wir auf der Menge I' eine Äquivalenzrelation. Wir nennen zwei Elemente $a', a'' \in I'$ äquivalent, wenn es Elemente $t, y \in \mathbb{F}$ mit $t^{q-1} = 1, y^q = y$ gibt, so dass

$$a'' = t(a + y)$$

gilt. Die Parametermenge I_3 ist dann definiert als ein Vertretersystem der zu dieser Äquivalenzrelation gehörigen Äquivalenzklassen. Es sei I_3 außerdem so gewählt, dass das bei dem Repräsentanten der unipotenten Konjugiertenklasse $c_{1,5}^G$ von $\mathbf{G}^F$ auftretende a Element von I_3 ist (vergleiche Tabelle 3.2 in Abschnitt 3.1). Ein Vertretersystem für die mit $c_{1,17}$ bezeichneten unipotenten Klassen ist durch die Elemente $x_\alpha(1)x_{\alpha+\beta}(a')$ gegeben, wobei a' die Menge I_3 durchläuft. Auch hier treffen wir die Konvention, dass wir statt $c_{1,17}$ präziser $c_{1,17}(a')$ schreiben ($a' \in I_3$), falls wir besonders betonen wollen, dass wir die unipotente Konjugiertenklasse von $\mathbf{B}^F$ mit dem Repräsentanten $x_\alpha(1)x_{\alpha+\beta}(a')$ meinen.

Gemischte Klassen

Eine Liste der Konjugiertenklassen von $\mathbf{B}^F$ ist bereits in Tafel 3.8.2 in Geck [19] enthalten. Die Zentralisatorordnungen der gemischten Klassen lassen sich analog zu den Zentralisatorordnungen der unipotenten Klassen berechnen (vergleiche Abschnitt 3.8 in [19]). Da wir im Folgenden die Konjugiertenklassen von $\mathbf{B}^F$ mehrfach benötigen werden, sind der Vollständigkeit halber noch einmal sämtliche Konjugiertenklassen von $\mathbf{B}^F$ in Tabelle A.11 im Anhang aufgelistet.

Zu den hier gewählten Bezeichnungen der Konjugiertenklassen ist folgendes zu sagen: Wir haben zu jedem halbeinfachen Klassentyp h_i von $\mathbf{B}^F$ Repräsentanten angegeben (Tabelle A.9). Die Zentralisatoren dieser Repräsentanten seien für den Moment mit $\mathbf{C}_{\mathbf{B}^F}^{(Fn-1)}$ bezeichnet. In Tabelle A.11 ist nun für jede unipotente Klasse von $\mathbf{C}_{\mathbf{B}^F}^{(Fn-1)}$ mit Vertreter u eine Zeile eingetragen, die zu den Klassen mit Repräsentant su gehört, wobei s Repräsentant einer Klasse des halbeinfachen Klassentyps h_i aus Tabelle A.9 sei. Wir wollen eine solche Familie von Klassen – analog zur Notation für $\mathbf{G}^F$ – einen *Klassentyp* nennen.

Wir bezeichnen die Klassentypen mit $c_{i,j}$, falls der halbeinfache Anteil zum halbeinfachen Klassentyp h_i gehört. Mit dem zweiten Index j werden die unipotenten Klassen von $\mathbf{C}_{\mathbf{B}^F}^{(Fn-1)}$ durchnummeriert. Wir haben hierbei auf die Sortierung nach fallender Zentralisatorordnung verzichtet, sondern die in [19] gewählte Reihenfolge beibehalten (die im Wesentlichen an den Fusionen der Klassen in $\mathbf{G}^F$ orientiert ist). Wir beginnen allerdings weiterhin immer mit $j = 0$, so dass $c_{i,0}$ für die halbeinfachen Klassen des Typs h_i steht. Wenn wir die Klassen in einem Klassentyp genauer bezeichnen wollen, schreiben wir $c_{i,j}(i_1, \dots)$, wobei die Parameter sich auf den halbeinfachen Anteil beziehen, wie in Tabelle A.9 festgelegt. Wenn wir betonen wollen, dass der Klassentyp $c_{i,j}$ Konjugiertenklassen in $B = \mathbf{B}^F$ bezeichnet, so schreiben wir auch $c_{i,j}^B$.

Fusionen der Konjugiertenklassen von $\mathbf{B}^F$ in $\mathbf{G}^F$

In diesem Abschnitt wollen wir die Fusionen der Konjugiertenklassen von $B := \mathbf{B}^F$ in $G := \mathbf{G}^F$ bestimmen, d.h. wir suchen bezüglich der von uns gewählten Parametrisierung der Konjugiertenklassen von B bzw. G eine explizite Beschreibung der Abbildung, die jeder Konjugiertenklasse c^B von B die Konjugiertenklasse c^G von G zuordnet. Wir beweisen hierzu den folgenden

3.2.1 Satz

Die Fusionen der Konjugiertenklassen von $\mathbf{B}^F$ in $\mathbf{G}^F$ sind durch die Tabelle A.12 im Anhang gegeben.

Beweis: Die Fusionen der unipotenten Klassen wurden bereits in Geck [19] bestimmt. Den dortigen Beweis auf Seite 90f können wir wörtlich übernehmen, wenn man zum Nachweis der Konjugiertheit der drei Elemente $u_3 := x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(-1)$, $u'_3 := x_\beta(1)x_{3\alpha+\beta}(1)$ und $x_{\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(1)$ noch beachtet, dass

$$v_1 u'_3 v_1^{-1} = x_{\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(1) \text{ und } (x_{\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(1))^{n_\alpha} = u_3$$

mit $v_1 := x_\alpha(1) n_\alpha h(1, -2, 1, 1) x_\alpha(-1)x_{3\alpha+\beta}(1/2)$ gilt.

Die Fusionen der gemischten Klassen von $\mathbf{B}^F$ ergeben sich folgendermaßen: Die Fusionen der Klassen $c_{2,0}$, $c_{2,1}$, $c_{2,2}$, $c_{2,3}$, $c_{2,4}$, $c_{5,0}$, $c_{5,3}$, $c_{5,4}$, $c_{6,0}$, $c_{6,1}$, $c_{11,0}$, $c_{11,1}$, $c_{12,0}$ in $\mathbf{G}^F$ sind

$x \in \mathbf{G}^F$	$y \in \mathbf{B}^F$	$xyx^{-1} \in \mathbf{B}^F$
n_β $n_\beta h(1, -1, 1, 1)$ n_β $n_\beta h(1, -1, 1, 1)$ $n_\beta h(1, -1, 1, 1)$	h_2 $h_2 x_\alpha(1)$ $h_2 x_{3\alpha+2\beta}(1)$ $h_2 x_\alpha(1) x_{3\alpha+2\beta}(-1)$ $h_2 x_\alpha(1) x_{3\alpha+2\beta}(-\zeta)$	h_3 $h_3 x_{\alpha+\beta}(1)$ $h_3 x_{3\alpha+\beta}(1)$ $h_3 x_{\alpha+\beta}(1) x_{3\alpha+\beta}(1)$ $h_3 x_{\alpha+\beta}(1) x_{3\alpha+\beta}(\zeta)$
$n_\alpha n_\beta$ $n_\alpha n_\beta h(1, -1, 1, 1)$ $n_\alpha n_\beta h(1, -1, 1, 1)$ $n_\alpha n_\beta$ $n_\alpha n_\beta h(1, \zeta^{-1}, 1, 1)$	h_2 $h_2 x_{3\alpha+2\beta}(1)$ $h_2 x_\alpha(1)$ $h_2 x_\alpha(1) x_{3\alpha+2\beta}(-1)$ $h_2 x_\alpha(1) x_{3\alpha+2\beta}(-\zeta)$	h_4 $h_4 x_\beta(1)$ $h_4 x_{2\alpha+\beta}(1)$ $h_4 x_\beta(1) x_{2\alpha+\beta}(-1)$ $h_4 x_\beta(1) x_{2\alpha+\beta}(-\zeta)$
$n_\alpha n_\beta n_\alpha h(-1, 1, -1, -1)$ $n_\beta h(-1, 1, -1, -1)$	$h_5(i) x_\beta(1)$ $h_5(i) x_{3\alpha+\beta}(1)$	$h_5(i) x_{3\alpha+2\beta}(1)$ $h_5(i) x_{3\alpha+2\beta}(1)$
n_β n_β	$h_7(i)$ $h_7(i) x_{\alpha+\beta}(1)$	$h_6(i)$ $h_6(i) x_\alpha(1)$
n_α $n_\alpha h(-1, 1, -1, -1)$	$h_8(i)$ $h_8(i) x_{2\alpha+\beta}(1)$	$h_7(i)$ $h_7(i) x_{\alpha+\beta}(1)$
n_α n_α	$h_9(i)$ $h_9(i) x_\beta(1)$	$h_{10}((q^2 + q - 1)i)$ $h_{10}((q^2 + q - 1)i) x_{3\alpha+2\beta}(1)$
n_β n_β	$h_{11}(i)$ $h_{11}(i) x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$h_{10}(i)$ $h_{10}(i) x_{3\alpha+\beta}(1)$

 Tabelle 3.4: Zum Beweis der Fusionen der Konjugiertenklassen von B in G

wegen der Wahl der Repräsentanten in den Tabellen A.7 und A.11 offensichtlich. Die Aussagen über die Fusionen der restlichen Konjugiertenklassen von $\mathbf{B}^F$ ergeben sich aus Tabelle 3.4.

■

3.3 Konjugiertenklassen einer Levi-Untergruppe

Dieser Abschnitt und der Abschnitt 3.5 dienen dazu, die Konjugiertenklassen einer maximalen parabolischen Untergruppe P von $\mathbf{G}^F$ zu berechnen. In diesem Abschnitt beginnen wir damit, die Konjugiertenklassen einer Levi-Untergruppe von P zu bestimmen.

Wir behalten die Bezeichnungen aus Kapitel 2 bei. Es sei weiterhin $\mathbf{G}$ die in Kapitel 2 beschriebene einfache algebraische Gruppe von adjungiertem Typ mit Dynkin-Diagramm D_4 und $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ der dort konstruierte Frobeniusmorphismus. Auch in diesem Abschnitt verlangen wir stets, dass q ungerade ist.

Wir betrachten die Teilmenge $J := \{r_1, r_3, r_4\}$ von Δ . Es sei $\mathbf{L}_P$ die Standard-Levi-Untergruppe von $\mathbf{G}$ zur Menge J , also

$$\mathbf{L}_P = \langle \mathbf{T}, X_{r_1}, X_{-r_1}, X_{r_3}, X_{-r_3}, X_{r_4}, X_{-r_4} \rangle,$$

wobei auf der rechten Seite das Untergruppenerzeugnis (als abstrakte oder algebraische Untergruppe) von $\mathbf{G}$ gemeint ist. Dann ist $\mathbf{L}_P$ eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe (30.2 in Humphreys [28]). Wegen $\rho r_1 = r_3$, $\rho r_3 = r_4$ und $\rho r_4 = r_1$ ist $\mathbf{L}_P$ eine F -stabile Untergruppe, also eine rationale Levi-Untergruppe von $\mathbf{G}$. Wir definieren die Untergruppe L_P von $\mathbf{L}_P$ durch

$$L_P := (\mathbf{L}_P)^F = \langle \mathbf{T}^F, X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle$$

mit X_α und $X_{-\alpha}$ wie auf Seite 47. Die Ordnung von L_P ist:

$$|L_P| = |(\mathbf{L}_P)^F| = q^3(q^6 - 1)(q - 1).$$

L_P ist als die Fixpunktmenge einer Frobeniusabbildung einer zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe eine endliche Gruppe vom Lie-Typ. Zur Bestimmung der Konjugiertenklassen von L_P steht uns daher die Theorie über die Konjugiertenklassen der endlichen Gruppen vom Lie-Typ zur Verfügung. Wir können also ähnlich vorgehen wie bei den Konjugiertenklassen von $\mathbf{G}^F = {}^3D_4(q)$. Bedingt durch den kleinen Rang von $\mathbf{L}_P$ sind die Rechnungen jedoch viel einfacher als bei $\mathbf{G}^F = {}^3D_4(q)$, so dass wir uns hier relativ kurz fassen wollen.

Maximale Tori

Wie man am Dynkin-Diagramm des Wurzelsystems D_4 ablesen kann, ist die Weylgruppe $\mathbf{W}_{\mathbf{L}_P}$ von $\mathbf{L}_P$ das direkte Produkt dreier Weylgruppen vom Typ A_1 . Genauer gilt:

$$\mathbf{W}_{\mathbf{L}_P} = \langle w_{r_1}, w_{r_3}, w_{r_4} \rangle = \langle w_{r_1} \rangle \times \langle w_{r_3} \rangle \times \langle w_{r_4} \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Unter Beachtung von

$$w_{r_1}^F = w_{r_3}, w_{r_3}^F = w_{r_4} \text{ und } w_{r_4}^F = w_{r_1}$$

lassen sich die F -Klassen von $\mathbf{W}_{\mathbf{L}_P}$ ausrechnen, und man erhält: Es gibt in $\mathbf{W}_{\mathbf{L}_P}$ genau zwei F -Klassen. Wir haben deren Vertreter so gewählt, dass sie mit den Vertretern $w_0 = 1$ und $w_2 = w_{r_1}w_{r_3}w_{r_4}$ der F -Klassen von $\mathbf{W}$ übereinstimmen. Somit gibt es in $L_P = (\mathbf{L}_P)^F$ bis auf $(\mathbf{L}_P)^F$ -Konjugation genau zwei maximale Tori, nämlich

$$\mathbf{T}_0^F = \mathbf{T}^F \text{ und } \mathbf{T}_2^F = \mathbf{T}^{(Fw_2^{-1})}$$

(vergleiche Tabelle A.4 im Anhang). Also gilt:

3.3.1 Satz (Maximale Tori von L_P)

In L_P gibt es genau zwei Konjugiertenklassen von maximalen Tori. Eine Beschreibung von Repräsentanten dieser beiden Konjugiertenklassen als Fixpunkte in $\mathbf{T}$ von getwisteten Frobeniusmorphisms ist in Tabelle A.14 im Anhang gegeben.

Beweis: Siehe den vorangegangenen Abschnitt. ■

Halbeinfache Konjugiertenklassen

Es gibt in L_P genau drei halbeinfache Klassentypen h_1 , h_2 und h_3 : Der halbeinfache Klassentyp h_1 besteht genau aus den zentralen Klassen von L_P , während h_2 und h_3 aus den regulären halbeinfachen Klassen bestehen. Ein Vertretersystem der halbeinfachen Konjugiertenklassen von $L_P = (\mathbf{L}_P)^F$ erhält man, indem man für die beiden maximalen Tori $\mathbf{T}_0^F$ und $\mathbf{T}_2^F$ die Bahnen von $\mathbf{W}_i \cap \mathbf{W}_{L_P}$ auf $\mathbf{T}_i^F$ berechnet. Wir halten in einem Satz fest:

3.3.2 Satz (Halbeinfache Klassen von L_P)

In L_P gibt es genau drei halbeinfache Klassentypen. Repräsentanten für die zugehörigen halbeinfachen Konjugiertenklassen von L_P sind in Tabelle A.15 im Anhang gegeben.

Beweis: Siehe den vorangegangenen Abschnitt. ■

Wenn wir betonen wollen, dass wir mit h_i eine Vereinigung von Konjugiertenklassen in L_P meinen, so schreiben wir auch $h_i^{L_P}$.

Parametrisierung der halbeinfachen Klassen

Die Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von L_P nehmen wir analog zur Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von $\mathbf{G}^F$ vor. Die Vertreter und Parameterbereiche sind in Tabelle A.16 im Anhang aufgeführt.

Unipotente Konjugiertenklassen

Die Operation des maximalen Torus $\mathbf{T}^F$ von $L_P = (\mathbf{L}_P)^F$ auf der Wurzeluntergruppe X_α von $L_P = (\mathbf{L}_P)^F$ besitzt genau 2 Bahnen. Somit gibt es in L_P genau 2 unipotente Konjugiertenklassen. Als Repräsentanten wählen wir 1 und $x_\alpha(1)$. Wir wollen noch kurz den Zentralisator von $x_\alpha(1)$ in L_P bestimmen. Unter Benutzung der Relationen aus Abschnitt 2.3 erhält man:

$$C_{L_P}(x_\alpha(1)) = \{h(t, t^2, t, t)x_\alpha(u) \mid t, u \in \mathbb{F}, t^{q-1} = 1, u^{q^3} = u\}.$$

Insbesondere gilt: $|C_{L_P}(x_\alpha(1))| = q^3(q-1)$.

Gemischte Klassen

Da alle halbeinfachen Elemente von $L_P = (\mathbf{L}_P)^F$ entweder zentral oder regulär sind, ist die Kenntnis der halbeinfachen und unipotenten Klassen von L_P gleichbedeutend mit der Kenntnis sämtlicher Konjugiertenklassen von L_P , so dass wir diese Klassen nun alle angeben können.

3.3.3 Satz (Konjugiertenklassen von L_P)

Die Standard-Levi-Untergruppe L_P besitzt genau $q^4 - q^3 + q - 1$ Konjugiertenklassen. Ein Vertretersystem für die Konjugiertenklassen ist in Tabelle A.17 im Anhang gegeben.

Beweis: Siehe den vorangegangenen Abschnitt. Die Aussage über die Anzahl der Konjugiertenklassen folgt aus Tabelle A.15 im Anhang. ■

Die Bezeichnung der Klassentypen von $L_P = (\mathbf{L}_P)^F$ in Tabelle A.17 nehmen wir wie bei $\mathbf{G}^F = {}^3D_4(q)$ vor (vergleiche den Unterabschnitt „Gemischte Klassen“ in Abschnitt 3.1). Wenn wir betonen wollen, dass der Klassentyp $c_{i,j}$ Konjugiertenklassen in L_P bezeichnet, so schreiben wir auch $c_{i,j}^{L_P}$.

3.4 Konjugiertenklassen einer weiteren Levi-Untergruppe

In diesem Abschnitt benutzen wir die Methoden aus dem vorigen Abschnitt, um die Konjugiertenklassen eines weiteren Levi-Komplements zu berechnen. Wir werden diese bei der Berechnung der Konjugiertenklassen einer weiteren maximalen parabolischen Untergruppe von $\mathbf{G}^F$ benötigen. Da die Rechnungen und Argumente analog zu denen im vorangegangenen Abschnitt verlaufen (und teilweise sogar einfacher sind), fassen wir uns in diesem Abschnitt kurz und geben hier nur die Ergebnisse an.

Wir behalten die Bezeichnungen aus Kapitel 2 bei. Es sei weiterhin $\mathbf{G}$ die in Kapitel 2 beschriebene einfache algebraische Gruppe von adjungiertem Typ mit Dynkin-Diagramm D_4 und $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ der dort konstruierte Frobeniusmorphismus. Auch in diesem Abschnitt verlangen wir stets, dass q ungerade ist.

Wir betrachten die Teilmenge $J := \{r_2\}$ von Δ . Die Standard-Levi-Untergruppe von $\mathbf{G}$ zur Menge J bezeichnen wir mit $\mathbf{L}_Q$, also

$$\mathbf{L}_Q = \langle \mathbf{T}, X_{r_2}, X_{-r_2} \rangle,$$

wobei auf der rechten Seite das Untergruppenerzeugnis (als abstrakte oder algebraische Untergruppe) von $\mathbf{G}$ gemeint ist. Dann ist $\mathbf{L}_Q$ eine zusammenhängende reduktive algebraische Gruppe (30.2 in Humphreys [28]). Wegen $\rho r_2 = r_2$ ist $\mathbf{L}_P$ eine F -stabile Untergruppe,

also eine rationale Levi-Untergruppe von $\mathbf{G}$. Wir definieren die Untergruppe L_Q von $\mathbf{L}_Q$ durch:

$$L_Q := (\mathbf{L}_Q)^F = \langle \mathbf{T}^F, X_\beta, X_{-\beta} \rangle.$$

Die Ordnung von L_Q ist:

$$|L_Q| = |(\mathbf{L}_Q)^F| = q(q^3 - 1)(q^2 - 1).$$

Maximale Tori

Wie man am Dynkin-Diagramm des Wurzelsystems D_4 ablesen kann, ist die Weylgruppe $\mathbf{W}_{\mathbf{L}_Q}$ von $\mathbf{L}_Q$ eine Weylgruppen vom Typ A_1 . Genauer gilt:

$$\mathbf{W}_{\mathbf{L}_Q} = \langle w_{r_2} \rangle \cong \mathbb{Z}_2.$$

Es gibt in $\mathbf{W}_{\mathbf{L}_Q}$ genau zwei F -Klassen. Als Vertreter kann man $w_0 = 1$ und $w_1 = w_{r_2}$ wählen. Somit gibt es in $L_Q = (\mathbf{L}_Q)^F$ bis auf $(\mathbf{L}_Q)^F$ -Konjugation genau zwei maximale Tori, nämlich den Standardtorus $\mathbf{T}_0^F = \mathbf{T}^F$ und einen weiteren, getwisteten Torus $\mathbf{T}_1^F$ (siehe Tabelle A.4 im Anhang). Also gilt:

3.4.1 Satz (Maximale Tori von L_Q)

In L_Q gibt es genau zwei Konjugiertenklassen von maximalen Tori. Eine Beschreibung von Repräsentanten dieser beiden Konjugiertenklassen als Fixpunkte in $\mathbf{T}$ von getwisteten Frobeniusmorphisamen ist in Tabelle A.19 im Anhang gegeben.

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 3.3.1. ■

Halbeinfache Konjugiertenklassen

Es gibt in L_Q genau drei halbeinfache Klassentypen h_1, h_2 und h_3 : Der halbeinfache Klassentyp h_1 besteht genau aus den zentralen Klassen von L_Q , während h_2 und h_3 aus den regulären halbeinfachen Klassen bestehen. Ein Vertretersystem der halbeinfachen Konjugiertenklassen von $L_Q = (\mathbf{L}_Q)^F$ erhält man, indem man für die beiden maximalen Tori $\mathbf{T}_0^F$ und $\mathbf{T}_1^F$ die Bahnen von $\mathbf{W}_i \cap \mathbf{W}_{L_Q}$ auf $\mathbf{T}_i^F$ berechnet. Wir halten in einem Satz fest:

3.4.2 Satz (Halbeinfache Klassen von L_Q)

In L_Q gibt es genau drei halbeinfache Klassentypen. Repräsentanten für die zugehörigen halbeinfachen Konjugiertenklassen von L_Q sind in Tabelle A.20 im Anhang gegeben.

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 3.3.2. ■

Wenn wir betonen wollen, dass wir mit h_i eine Vereinigung von Konjugiertenklassen in L_Q meinen, so schreiben wir auch $h_i^{L_Q}$.

Parametrisierung der halbeinfachen Klassen

Die Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von L_Q nehmen wir analog zur Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von $\mathbf{G}^F$ vor. Die Vertreter und Parameterbereiche sind in Tabelle A.21 im Anhang aufgeführt.

Unipotente und gemischte Klassen

Die Bestimmung der unipotenten und gemischten Konjugiertenklassen von L_Q verläuft analog zur Bestimmung der unipotenten und gemischten Konjugiertenklassen von L_P . Das Ergebnis ist in folgendem Satz zusammengefasst:

3.4.3 Satz (Konjugiertenklassen von L_Q)

Die Standard-Levi-Untergruppe L_Q besitzt genau $q^4 + q^3 - q - 1$ Konjugiertenklassen. Ein Vertretersystem für die Konjugiertenklassen ist in Tabelle A.22 im Anhang gegeben.

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 3.3.3. ■

Die Bezeichnung der Klassentypen von $L_Q = (\mathbf{L}_Q)^F$ in Tabelle A.22 nehmen wir wie bei $\mathbf{G}^F = {}^3D_4(q)$ vor (vergleiche den Unterabschnitt „Gemischte Klassen“ in Abschnitt 3.1). Wenn wir betonen wollen, dass der Klassentyp $c_{i,j}$ Konjugiertenklassen in L_P bezeichnet, so schreiben wir auch $c_{i,j}^{L_Q}$.

3.5 Konjugiertenklassen einer maximalen parabolischen Untergruppe

In diesem Abschnitt werden die Konjugiertenklassen einer maximalen parabolischen Untergruppe P von $\mathbf{G}^F$ bestimmt. Wir behalten die Bezeichnungen aus Kapitel 2 bei. Es sei weiterhin $\mathbf{G}$ die in Kapitel 2 beschriebene einfache algebraische Gruppe von adjungiertem Typ mit Dynkin-Diagramm D_4 und $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ der dort konstruierte Frobeniusmorphismus. Auch in diesem Abschnitt verlangen wir stets, dass q ungerade ist.

Wir betrachten die Teilmenge $J := \{r_1, r_3, r_4\}$ von Δ . Es sei $\mathbf{P}$ die Standard-parabolische-

Untergruppe von $\mathbf{G}$ zur Menge J , also

$$\mathbf{P} = \langle \mathbf{B}, n_{r_1}, n_{r_3}, n_{r_4} \rangle,$$

wobei auf der rechten Seite das Untergruppenerzeugnis (als abstrakte oder algebraische Untergruppe) von $\mathbf{G}$ gemeint ist. $\mathbf{P}$ ist eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $\mathbf{G}$, die wegen $\rho r_1 = r_3$, $\rho r_3 = r_4$ und $\rho r_4 = r_1$ zusätzlich F -stabil ist. Also ist $\mathbf{P}$ eine rationale parabolische Untergruppe von $\mathbf{G}$. Wir definieren die Untergruppe

$$P := (\mathbf{P})^F = \langle \mathbf{B}^F, n_\alpha \rangle.$$

Also ist P eine parabolische Untergruppe der endlichen Gruppe $G = \mathbf{G}^F = {}^3D_4(q)$. Für die Ordnung von P gilt:

$$|P| = |\mathbf{P}^F| = q^{12}(q^6 - 1)(q - 1).$$

Als parabolische Untergruppen besitzen $\mathbf{P}$ und P eine besonders wichtige gruppentheoretische Eigenschaft, die durch den folgenden Satz beschrieben wird:

3.5.1 Satz (Levi–Zerlegung von $\mathbf{P}$ und P)

Es seien wie oben

$$\mathbf{L}_P = \langle \mathbf{T}, X_{r_1}, X_{-r_1}, X_{r_3}, X_{-r_3}, X_{r_4}, X_{-r_4} \rangle$$

und

$$L_P = (\mathbf{L}_P)^F = \langle \mathbf{T}^F, X_\alpha, X_{-\alpha} \rangle$$

mit X_α und $X_{-\alpha}$ wie auf Seite 47. Es seien ferner:

$$\mathbf{U}_P := \prod_{\substack{r \in \Phi^+ \\ r \neq r_1, r_3, r_4}} X_r$$

und

$$U_P := (\mathbf{U}_P)^F = X_\beta X_{\alpha+\beta} X_{2\alpha+\beta} X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}.$$

Dann ist $\mathbf{P}$ das semidirekte Produkt:

$$\mathbf{P} = \mathbf{L}_P \ltimes \mathbf{U}_P,$$

und P ist das semidirekte Produkt:

$$P = L_P \ltimes U_P.$$

Beweis: Dies folgt aus Proposition 2.6.4 in Carter [7], wenn man noch beachtet, dass $\mathbf{G}$ und $G = \mathbf{G}^F$ Gruppen mit zerfallenden BN -Paaren sind. ■

Die unipotente Untergruppe $\mathbf{U}_P$ von $\mathbf{P}$ bzw. U_P von P heißt das *unipotente Radikal* von $\mathbf{P}$ beziehungsweise P . Die Untergruppe $\mathbf{L}_P$ von $\mathbf{P}$ beziehungsweise L_P von P heißt ein *Levi-Komplement* von $\mathbf{P}$ beziehungsweise P .

Da wir die Konjugiertenklassen von L_P bereits kennen, liegt es nahe, L_P als Faktor von P aufzufassen und die Konjugiertenklassen von P dadurch zu bestimmen, dass man untersucht, wie die Konjugiertenklassen dieses Faktors in P aufspalten. Genau dies soll in den nächsten Unterabschnitten untersucht werden.

Maximale Tori

Wie man dem Beweis von Proposition 3.3.3 in Carter [7] entnehmen kann, ist ein Vertretersystem der L_P -Konjugiertenklassen der F -stabilen maximalen Tori von $\mathbf{L}_P$ auch ein Vertretersystem der P -Konjugiertenklassen der F -stabilen maximalen Tori von $\mathbf{P}$. Somit besteht ein Vertretersystem der P -Konjugiertenklassen der F -stabilen maximalen Tori von $\mathbf{P}$ genau aus den in Tabelle A.14 im Anhang aufgeführten Tori.

Halbeinfache Konjugiertenklassen

Wir gehen bei der Bestimmung der halbeinfachen Konjugiertenklassen von $P = \mathbf{P}^F$ ähnlich vor wie bei $\mathbf{B}^F$ und $\mathbf{G}^F$. Ziel dieses Unterabschnitts ist der Beweis des folgenden Satzes:

3.5.2 Satz (Halbeinfache Klassentypen von P)

Die parabolische Untergruppe $P = \mathbf{P}^F$ besitzt genau 12 halbeinfache Klassentypen. Vertreter für die zu diesen halbeinfachen Klassentypen gehörigen Konjugiertenklassen können so gewählt werden wie in Tabelle A.23 im Anhang angegeben.

Beweis: Jedes halbeinfache Element aus P ist zu einem Element aus dem maximalen Torus $\mathbf{T}_0^F$ oder dem maximalen Torus $\mathbf{T}_2^F$ in P konjugiert (dies folgt aus Digne–Michel [15], Corollary 0.12 und Corollary 3.16 sowie aus Proposition 3.3.3 in Carter [7], angewandt auf die zusammenhängende F -stabile algebraische Gruppe $\mathbf{P}$). Insbesondere ist also jedes halbeinfache Element aus P konjugiert in P zu einem halbeinfachen Element aus L_P . Sind zwei Elemente $x, y \in L_P$ zueinander in P konjugiert, so sind sie bereits zueinander in L_P konjugiert (fasse L_P als Faktor von P auf). Hieraus folgt, dass ein Vertretersystem der halbeinfachen Konjugiertenklassen von L_P auch ein Vertretersystem der halbeinfachen Konjugiertenklassen von P ist.

Gehören zwei halbeinfache Klassen von L_P zu unterschiedlichen halbeinfachen Klassentypen von L_P , so gehören sie auch zu unterschiedlichen halbeinfachen Klassentypen

von P (fasse $\mathbf{L}_P$ als Faktor von $\mathbf{P}$ auf). Umgekehrt kann es allerdings passieren, dass halbeinfache Klassen von L_P , die zum gleichen halbeinfachen Klassentyp von L_P gehören, zu unterschiedlichen halbeinfachen Klassentypen von P gehören.

Wir müssen also noch die halbeinfachen Klassentypen der halbeinfachen Klassen von L_P in P bestimmen. (In etwas unpräziserer Ausdrucksweise: Wir müssen die „Aufspaltung der halbeinfachen Klassentypen“ von L_P in P bestimmen.) Hierzu benutzen wir neben der Kenntnis der Konjugiertenklassen von L_P auch die Kenntnis der Konjugiertenklassen von B .

Wir bestimmen zunächst für die zentralen Klassen von L_P (vergleiche Tabelle A.15 und Tabelle A.17 im Anhang) mit Vertretern

$$h(t, t^2, t, t), t \in \mathbb{F}, t^{q-1} = 1$$

die Zentralisatoren in P sowie in $\mathbf{P}$. Für die Bestimmung des Zentralisators in P ist auf Grund der Levi-Zerlegung nur zu untersuchen, mit welchen Elementen

$$b := x_\beta(s_2)x_{\alpha+\beta}(s_3)x_{2\alpha+\beta}(s_4)x_{3\alpha+\beta}(s_5)x_{3\alpha+2\beta}(s_6)$$

aus dem unipotenten Radikal sie vertauschen. Die Gleichung $bh(t, t^2, t, t) = h(t, t^2, t, t)b$ ist äquivalent zu folgendem Gleichungssystem:

$$-s_i + ts_i = 0, i = 2, \dots, 5,$$

$$-s_6 + t^2s_6 = 0.$$

Für die Zentralisatoren erhält man somit:

$$\begin{aligned} C_P(h(1, 1, 1, 1)) &= P, \\ C_P(h(-1, 1, -1, -1)) &= \langle L_P, X_{3\alpha+2\beta} \rangle, \\ C_P(h(t, t^2, t, t)) &= L_P \end{aligned}$$

für $t^{q-1} = 1, t^2 \neq 1$.

Eine analoge Rechnung in $\mathbf{G}$ liefert:

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{P}}(h(1, 1, 1, 1)) &= \mathbf{P}, \\ C_{\mathbf{P}}(h(-1, 1, -1, -1)) &= \langle \mathbf{L}_P, X_{r_{12}} \rangle, \\ C_{\mathbf{P}}(h(t, t^2, t, t)) &= \mathbf{L}_P \end{aligned}$$

für $t^{q-1} = 1, t^2 \neq 1$.

Dies liefert die halbeinfachen Klassentypen h_1, h_2 und h_4 in Tabelle A.23. (Diese drei halbeinfachen Klassentypen sind paarweise verschieden, da die zugehörigen Zentralisatoren $\mathbf{P}, \mathbf{L}_P X_{r_{12}}$ und $\mathbf{L}_P$ in P wegen ihrer unterschiedlichen Dimensionen paarweise nicht konjugiert sind.)

Als nächstes wollen wir für die nicht-zentralen halbeinfachen Klassen von L_P , deren Vertreter in $\mathbf{T}_0^F$ liegen, die halbeinfachen Klassentypen in P bestimmen. Hierzu machen wir folgende einfache Beobachtung: Das Element $n_\alpha := n_{r_1}n_{r_3}n_{r_4}$ ist in $\mathbf{W}^F$ enthalten und operiert somit per Konjugation auf $\mathbf{T}_0^F$. Liegen zwei Elemente $s_1, s_2 \in \mathbf{T}_0^F$ in Konjugiertenklassen von gleichem halbeinfachem Klassentyp, so gilt dies auch für ${}^{n_\alpha}s_1$ und ${}^{n_\alpha}s_2$. Also liefert die Operation von n_α auf $\mathbf{T}_0^F$ per Konjugation von links eine Operation von n_α auf denjenigen halbeinfachen Klassentypen von $\mathbf{B}^F$, die aus Konjugiertenklassen mit Vertretern in $\mathbf{T}_0^F$ bestehen. Es sei $h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})$ ein solcher Vertreter, also $t_1^{q^3-1} = t_1^{q-1} = 1$, $t_2 \neq t_1^2$. Dann ist der Zentralisator $C_{\mathbf{P}}(h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2}))$ in $\mathbf{B}$ enthalten. Da wir die halbeinfachen Klassentypen von B gemäß Tabelle A.8 als bekannt voraussetzen können, berechnen wir zunächst die Bahnen von $n_\alpha := n_{r_1}n_{r_3}n_{r_4}$ auf den halbeinfachen Klassentypen von $\mathbf{B}^F$. Diese Bahnen ergeben sich aus Tabelle 3.5. Die Aussagen in dieser Tabelle ergeben sich aus Tabelle 3.6 und Tabelle A.8 im Anhang.

h_i^B	h_1^B	h_2^B	h_3^B	h_4^B	h_5^B	h_6^B	h_7^B	h_8^B	h_9^B	h_{10}^B	h_{11}^B	h_{12}^B
$n_\alpha h_i^B$	h_1^B	h_4^B	h_3^B	h_2^B	h_5^B	h_6^B	h_8^B	h_7^B	h_{10}^B	h_9^B	h_{11}^B	h_{12}^B

Tabelle 3.5: Operation von n_α auf den halbeinfachen Klassentypen von $\mathbf{B}^F$

Typ	Repräsentant h	$n_\alpha h$
h_3^B	$h(-1, -1, -1, -1)$	$h(1, -1, 1, 1)$
h_5^B	$h(t, 1, t^q, t^{q^2})$ $t^{q^2+q+1} = 1, t \neq 1$	$h(t^{-1}, 1, (t^{-1})^q, (t^{-1})^{q^2})$
h_7^B	$h(t, t, t, t)$ $t^{q-1} = 1, t^2 \neq 1$	$h(1, t, 1, 1)$
h_9^B	$h(t^2, t^{q^2+q+1}, t^{2q}, t^{2q^2})$ $t^{q^3-1} = 1, t^{q^2+q+1} \neq 1, t^2 \neq 1$	$h(t^{q^2+q-1}, (t^{q^2+q-1})^{q^2+q+1}, (t^{q^2+q-1})^q, (t^{q^2+q-1})^{q^2})$
h_{11}^B	$h(t, 1, t^q, t^{q^2})$ $t^{q^3-1} = 1, t^{q^2+q+1} \neq 1, t^2 \neq 1$	$h(t^{-1}, 1, (t^{-1})^q, (t^{-1})^{q^2})$
h_{12}^B	$h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})$ $t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1;$ $t_1 \neq 1, t_2; t_2 \neq 1, t_1^2; t_1^{q^2+q+1} \neq t_2, t_2^2$	$h(t_2 t_1^{-1}, t_2, (t_2 t_1^{-1})^q, (t_2 t_1^{-1})^{q^2})$

Tabelle 3.6: Zur Bestimmung der halbeinfachen Klassentypen von P

Dies liefert die halbeinfachen Klassentypen h_3, h_5, h_6, h_7, h_8 und h_9 in Tabelle A.23. Wählt man Vertreter $h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})$ für die zu diesen halbeinfachen Klassentypen gehörigen halbeinfachen Konjugiertenklassen wie in Tabelle A.23, so sind die Zentralisatoren $C_{\mathbf{P}}(h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2}))$ in $\mathbf{B}$ enthalten, insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{P}}(h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})) &= C_{\mathbf{B}}(h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})) \text{ und} \\ C_P(h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})) &= C_B(h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})) \end{aligned}$$

Die Zentralisatoren auf der rechten Seite dieser Gleichungen lassen sich mit den Relationen aus Abschnitt 2.3 ausrechnen. Dass die halbeinfachen Klassentypen h_3, h_5, h_6, h_7, h_8 und h_9 in Tabelle A.23 paarweise verschieden sind, folgt nun aus den Zentralisatorordnungen $|C_P(h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2}))|$ und der Tatsache, dass $X_{r_{12}}$ von $\mathbf{P}$ normalisiert wird.

Zum Schluss wollen wir noch die halbeinfachen Klassentypen von P bestimmen, die aus Konjugiertenklassen mit Vertretern in $\mathbf{T}_2^F$ bestehen. Es sei $h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2})$ ein solcher Vertreter, also $t^{(q^3+1)(q-1)} = 1, t^{q-1} \neq 1$. Wir bestimmen zunächst die Zentralisatoren von $h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2})$ in P sowie in $\mathbf{P}$. Für $t^{q^3+1} \neq 1$ und $t^{q-1} \neq 1$ wissen wir bereits aus Tabelle A.5 im Anhang, dass $h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2})$ regulär in $\mathbf{G}$ ist. Somit hat man:

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{P}}(h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2})) &= \mathbf{T}_2 \text{ und} \\ C_P(h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2})) &= \mathbf{T}_2^F. \end{aligned}$$

für $t^{(q^3+1)(q-1)} = 1, t^{q^3+1} \neq 1$ und $t^{q-1} \neq 1$.

Die Zentralisatoren $C_{\mathbf{G}}(h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2}))$ und $C_G(h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2}))$ für $t^{q^2-q+1} = 1, t \neq 1$ haben wir bereits bei der Bestimmung der gemischten Klassen von $G = \mathbf{G}^F$ in Abschnitt 3.1 berechnet. Wir erhalten daraus:

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{P}}(h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2})) &= \mathbf{T}_2 X_{r_2} X_{r_{11}} X_{r_{12}} \text{ und} \\ C_P(h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2})) &= \mathbf{T}_2^F \tilde{X} \end{aligned}$$

für $t^{q^2-q+1} = 1, t \neq 1$. Hierbei ist $\tilde{X}$ definiert als die Menge aller $x_{\beta}(s)x_{3\alpha+\beta}(s^q)x_{3\alpha+2\beta}(r)$ mit $r, s \in \mathbb{F}$, s Nullstelle des Polynoms $X^{q^2} + X$, r Nullstelle des Polynoms $X^q - X - s^{q^2+q}$.

Auf analoge Weise erhält man die Zentralisatoren für $t^{q^3+1} = 1, t^{q^2-q+1} \neq 1, t^2 \neq 1$:

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{P}}(h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2})) &= \mathbf{T}_2 X_{r_{12}} \text{ und} \\ C_P(h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2})) &= \mathbf{T}_2^F X_{3\alpha+2\beta}. \end{aligned}$$

Dies liefert die halbeinfachen Klassentypen h_{10}, h_{11} und h_{12} aus Tabelle A.23. Die paarweise Verschiedenheit dieser drei Klassentypen folgt aus den unterschiedlichen Dimensionen der Zentralisatoren in $\mathbf{P}$. Damit sind die Aussagen über die halbeinfachen

Klassentypen in Tabelle A.23 bewiesen. Die Aussagen über die Anzahlen der Konjugiertenklassen in den einzelnen halbeinfachen Klassentypen ergeben sich aus der Operation von n_α auf den maximalen Tori (vergleiche Tabelle 3.6). Damit sind alle Aussagen aus Tabelle A.23 und damit Satz 3.5.2 vollständig bewiesen. ■

Damit haben wir die halbeinfachen Konjugiertenklassen von P bestimmt. Hinsichtlich der Bezeichnung der halbeinfachen Klassentypen h_i von P gehen wir wie üblich vor: Wenn wir betonen wollen, dass der halbeinfache Klassentyp h_i eine Vereinigung von Konjugiertenklassen in P bezeichnet, so schreiben wir auch h_i^P .

Parametrisierung der halbeinfachen Klassen

Die Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von $P = \mathbf{P}^F$ nehmen wir analog zur Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von $\mathbf{G}^F$ vor. Die Vertreter und Parameterbereiche sind in Tabelle A.24 im Anhang aufgeführt.

Unipotente Konjugiertenklassen

Es soll in diesem Unterabschnitt beschrieben werden, wie sich die unipotenten Konjugiertenklassen von $P = \mathbf{P}^F$ bestimmen lassen, d.h. ihre Vertreter und deren Zentralisatorordnungen in P . Dies ist die schwierigste Aufgabe bei der Bestimmung der Konjugiertenklassen von P . Hierzu gehen wir wie folgt vor: Die unipotenten Elemente in P sind genau die p -Elemente von P , also die Elemente von P , deren Ordnung eine Potenz von p ist. Da

$$U = \mathbf{U}^F = X_\alpha X_\beta X_{\alpha+\beta} X_{2\alpha+\beta} X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}$$

eine p -Sylowgruppe von P ist, können wir für jede unipotente Konjugiertenklasse von P einen Vertreter finden, der in U liegt. Zur Bestimmung eines Vertretersystems der unipotenten Klassen genügt es also, sich zu überlegen, wie die unipotenten Konjugiertenklassen $c_{1,0}^B, c_{1,1}^B, \dots, c_{1,18}^B$, von $B = \mathbf{B}^F$, die wir bereits aus Abschnitt 3.2 kennen (vergleiche Tabelle A.10 im Anhang), in P fusionieren.

Im Einzelnen wurden die Berechnungen so vorgenommen: Es durchlaufe x die Vertreter der unipotenten Konjugiertenklassen $c_{1,0}^B, c_{1,1}^B, \dots, c_{1,18}^B$ von B wie man sie der Tabelle A.10 entnehmen kann. Falls ohne größeren Aufwand möglich, wird zunächst der Zentralisator von x in P bestimmt. Insbesondere für Klassen, die im unipotenten Radikal U_P von P enthalten sind, lässt sich aus der Zentralisatorordnung bereits viel über die möglichen Fusionen aussagen, in vielen Fällen ist hierdurch sogar bereits die Fusion eindeutig festgelegt. Ist dies nicht der Fall, so werden die verschiedenen Vertreter der Konjugiertenklassen von B auf Konjugiertheit in P getestet. Selbstverständlich genügt es, nur solche Vertreter

auf Konjugiertheit in P zu untersuchen, deren Konjugiertenklassen in die gleiche Konjugiertenklasse von ${}^3D_4(q)$ fusionieren. (Diese Fusionen können Tabelle A.12 im Anhang entnommen werden.) Hieraus kann man dann bestimmen, welche der unipotenten Klassen von B in eine einzige Klasse von P fusionieren.

3.5.3 Bemerkung

Es wäre sehr wünschenswert, die bei den Zentralisator- und Fusionsberechnungen auftretenden polynomialen Gleichungssysteme automatisch (per Computer) lösen zu können. Insbesondere bei den getwisteten Chevalleygruppen, wie beispielsweise den Steinbergschen Trialitätsgruppen, treten in diesen polynomialen Gleichungssystemen jedoch häufig Polynome auf, deren Exponenten von q , also vom Frobeniusmorphismus F abhängen. Dies erkennt man bereits an den Kommutatorrelationen in Tabelle 2.3. Es scheint nicht ohne Weiteres vorstellbar, solche Systeme automatisch lösen zu können. Selbst von Hand sind solche Systeme (selbst bei kleiner Gleichungs- und Variablenanzahl) häufig nur sehr schwer lösbar. Man vergleiche hierzu auch die Bemerkungen in Abschnitt 3.9 in Geck [19].

Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden Satzes:

3.5.4 Satz (Unipotente Klassen von P)

Die parabolische Untergruppe $P = \mathbf{P}^F$ besitzt genau $q + 11$ unipotente Konjugiertenklassen. Repräsentanten und Zentralisatorordnungen sind wie zu Beginn der Tabelle A.25 im Anhang angegeben.

Beweis: Um Mehrdeutigkeiten in der Bezeichnung der unipotenten Klassen von B , P bzw. G zu vermeiden, bezeichnen wir in diesem Beweis die Konjugiertenklassen von P (die in Tabelle A.25 mit $c_{1,j}$, $j = 0, \dots, 10$ bezeichnet sind) auch mit $c_{1,j}^P$.

Wir beschreiben nun die zur Berechnung der Fusionen und Zentralisatoren nötigen Berechnungen für jede unipotente Klasse $c_{1,j}^B$ von B :

$c_{1,0}^B$:

Dies ist die Konjugiertenklasse des Einselements, so dass die Zentralisatorordnung durch

$$|P| = q^{12}(q^6 - 1)(q - 1)$$

gegeben ist.

$c_{1,1}^B$:

Der Repräsentant dieser Klasse ist $x := x_{3\alpha+2\beta}(1)$. Er wird zentralisiert von $U = \mathbf{U}^F$, so dass man nur testen muss, welche Elemente b der Form $b = x_\alpha(r)n_\alpha h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})$ das

Element x zentralisieren. Die Gleichung $bx = xb$ ist äquivalent zu:

$$t_2 = 1.$$

Dies liefert:

$$|C_P(x)| = q^{12}(q^3 - 1) + q^{12}(q^3 - 1)q^3 = q^{12}(q^6 - 1).$$

Wie man an den Zentralisatorordnungen ablesen kann, ist also insbesondere

$$C_P(x) = C_G(x).$$

Man beachte, dass die Konjugiertenklasse von x in P genau $q - 1$ Elemente umfasst ebenso wie die Konjugiertenklasse von x in B , d.h. die Konjugiertenklasse von x in B stimmt mit der von x in P überein. Als Konsequenz hieraus ergibt sich, dass die Klassen $c_{1,2}^B$ und $c_{1,3}^B$ in P nicht in die gleiche Klasse wie $c_{1,1}^B$ fusionieren können.

$c_{1,2}^B$ und $c_{1,3}^B$:

Die Repräsentanten dieser Klassen sind $x := x_{3\alpha+\beta}(1)$ und $y := x_\beta(1)$. Wegen $n_\alpha^{-1}xn_\alpha = y$ fallen diese beiden Klassen in P zusammen. Da $c_{1,2}^B$ und $c_{1,3}^B$ im unipotenten Radikal U_P von P enthalten sind und dieses normal in P ist, ist die Konjugiertenklasse von x in P genau die Vereinigung von $c_{1,2}^B$ und $c_{1,3}^B$. Für die Zentralisatorordnung ergibt sich also:

$$|C_P(x)| = \frac{|P|}{|c_{1,2}^B| + |c_{1,3}^B|} = \frac{q^{12}(q^6 - 1)(q - 1)}{q(q^3 + 1)(q - 1)} = q^{11}(q^3 - 1) = |C_B(x)|.$$

$c_{1,4}^B$, $c_{1,5}^B$ und $c_{1,6}^B$:

Es soll zunächst der Zentralisator des Vertreters $x := x_{2\alpha+\beta}(1)$ der Klasse $c_{1,4}^B$ berechnet werden. x wird zentralisiert von allen Wurzeluntergruppen, die in $U = \mathbf{U}^F$ enthalten sind, außer von X_α und $X_{\alpha+\beta}$. Es muss also nur getestet werden, welche Elemente b der Form $b = x_\alpha(r)n_\alpha h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})x_\alpha(s)x_{\alpha+\beta}(t)$ das Element x zentralisieren. Die Gleichung $bx = xb$ führt auf die Gleichung:

$$t_1^{q^2+q-1}t_2^{-1} = 0,$$

was wegen $t_1, t_2 \neq 0$ nicht erfüllt ist. Also gilt:

$$|C_P(x)| = |C_B(x)| = q^{10}(q - 1).$$

Bezeichnet $c_{1,3}^P$ die Konjugiertenklasse von x in P , so erhält man fuer die Länge von $c_{1,3}^P$:

$$|c_{1,3}^P| = \frac{|P|}{|C_P(x)|} = \frac{q^{12}(q^6 - 1)(q - 1)}{q^{10}(q - 1)} = q^2(q^6 - 1) = |c_{1,4}^B| + |c_{1,5}^B| + |c_{1,6}^B|.$$

Da $c_{1,4}^B$, $c_{1,5}^B$ und $c_{1,6}^B$ im unipotenten Radikal von P enthalten sind, und überdies die einzigen Konjugiertenklassen im unipotenten Radikal von P sind, die nach $c_{1,2}^G$ fusionieren, gilt somit: $c_{1,3}^P = c_{1,4}^B \cup c_{1,5}^B \cup c_{1,6}^B$. Insbesondere fusionieren also die Klassen $c_{1,4}^B$, $c_{1,5}^B$ und $c_{1,6}^B$ alle nach $c_{1,3}^P$.

$c_{1,7}^B$:

Der Repräsentant dieser Klasse ist $x := x_\alpha(1)$. Wegen $x \in L_P$ können wir aus Tabelle A.17 bereits ablesen, dass $C_P(x) \subseteq B$ gilt. Also hat man:

$$|C_P(x)| = |C_B(x)| = q^7(q-1).$$

$c_{1,8}^B$, $c_{1,9}^B$, $c_{1,10}^B$ und $c_{1,12}^B$:

Es soll zunächst der Zentralisator des Repräsentanten $x := x_\beta(1)x_{3\alpha+\beta}(1)$ der Klasse $c_{1,8}^B$ berechnet werden. x wird zentralisiert von den Wurzeluntergruppen $X_{\alpha+\beta}$, $X_{2\alpha+\beta}$ und $X_{3\alpha+2\beta}$ und den Elementen

$$n_\alpha h(t, -1, t^q, t^{q^2}) x_\beta(s) x_{3\alpha+\beta}(s+1)$$

mit $s, t \in \mathbb{F}$, $s^q = s$ und $t^{q^2+q+1} = 1$. Letzteres verifiziert man durch Nachrechnen unter Benutzung der Relationen aus Abschnitt 2.3. Somit gilt:

$$|C_P(x)| \geq |C_B(x)| + q^3 \cdot q^3 \cdot q \cdot q \cdot (q^2 + q + 1) = 2q^8(q^2 + q + 1).$$

Aus den Fusionen in Tabelle A.12 und den Zentralisatorordnungen in Tabelle A.7 wissen wir aber, dass $|C_G(x)| = 2q^8(q^2 + q + 1)$ gilt. Also gilt $C_P(x) = C_G(x)$ und

$$|C_P(x)| = 2q^8(q^2 + q + 1).$$

Bezeichnet $c_{1,5}^P$ die Konjugiertenklasse von x in P , so erhält man für die Länge von $c_{1,5}^P$:

$$|c_{1,5}^P| = \frac{|P|}{|C_P(x)|} = \frac{q^4}{2}(q^3 + 1)(q - 1)^2 = |c_{1,8}^P| + |c_{1,9}^P| + |c_{1,10}^P| + \sum_{(i,b) \in I_1} |c_{1,12}^P(i, b)|.$$

Da $c_{1,8}^B$, $c_{1,9}^B$, $c_{1,10}^B$ und $c_{1,12}^B(i, b)$ im unipotenten Radikal von P enthalten sind, und überdies die einzigen Konjugiertenklassen im unipotenten Radikal von P sind, die nach $c_{1,3}^G$ fusionieren, gilt somit: $c_{1,5}^P = c_{1,8}^B \cup c_{1,9}^B \cup c_{1,10}^B \cup_{(i,b) \in I_1} c_{1,12}^B(i, b)$. Insbesondere fusionieren also die Klassen $c_{1,8}^B$, $c_{1,9}^B$, $c_{1,10}^B$ und $c_{1,12}^B(i, b)$ alle nach $c_{1,5}^P$.

$c_{1,11}^B$:

Der Repräsentant dieser Klasse ist $x := x_\alpha(1)x_{3\alpha+2\beta}(-1)$. Wegen $x \in L_P$ können wir aus Tabelle A.17 bereits ablesen, dass $C_P(x) \subseteq B$ gilt. Also hat man:

$$|C_P(x)| = |C_B(x)| = 2q^7.$$

$c_{1,13}^B$, $c_{1,14}^B$ und $c_{1,16}^B$:

Der Repräsentant der Klasse $c_{1,14}^B$ ist $x := x_{\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(\zeta)$. Es soll zunächst eine untere Schranke für die Ordnung des Zentralisators $C_P(x)$ bestimmt werden. Wir wissen, dass x im unipotenten Radikal von P enthalten ist und dass $c_{1,14}^B$ in die Klasse $c_{1,4}^G$ von $G = {}^3D_4(q)$ fusioniert. Die einzigen Konjugiertenklassen, die im unipotenten Radikal von P enthalten sind und nach $c_{1,4}^G$ fusionieren, sind die Klassen $c_{1,13}^B$, $c_{1,14}^B$ und $c_{1,16}^B$. Bezeichnet $c_{1,7}^P$ die Konjugiertenklasse von x in P , so ist also $c_{1,7}^P$ eine Vereinigung der Klassen $c_{1,14}^B$ und gewisser der Klassen $c_{1,13}^B$ und $c_{1,16}^B$. Man erhält somit die folgende Abschätzung:

$$|c_{1,7}^P| \leq |c_{1,13}^B| + |c_{1,14}^B| + \sum_{(i,b) \in I_2} |c_{1,16}^B(i,b)| = \frac{q^4}{2}(q^3 - 1)(q^2 - 1).$$

Für die Zentralisatorordnung ergibt sich damit folgende untere Schranke:

$$|C_P(x)| \geq \frac{q^{12}(q^6 - 1)(q - 1)}{\frac{q^4}{2}(q^3 - 1)(q^2 - 1)} = 2q^8(q^2 - q + 1).$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist aber genau die Ordnung des Zentralisators $C_G(x)$ von x in $G = {}^3D_4(q)$. Somit hat man in den obigen Ungleichungen Gleichheit, und man erhält insbesondere $C_P(x) = C_G(x)$. Es folgt weiter, dass $c_{1,4}^G$ die Vereinigung sämtlicher Klassen $c_{1,13}^B$, $c_{1,14}^B$ und $c_{1,16}^B$ ist, d.h. alle Klassen $c_{1,13}^B$, $c_{1,14}^B$ und $c_{1,16}^B$ fusionieren nach $c_{1,4}^G$.

$c_{1,15}^B$:

Der Repräsentant dieser Klasse ist $x := x_\alpha(1)x_{3\alpha+2\beta}(-\zeta)$. Wegen $x \in L_P$ können wir aus Tabelle A.17 bereits ablesen, dass $C_P(x) \subseteq B$ gilt. Also hat man:

$$|C_P(x)| = |C_B(x)| = 2q^7.$$

$c_{1,17}^B$:

Die Repräsentanten dieser Klassen sind $x(a') := x_\alpha(1)x_{\alpha+\beta}(a')$, mit $a' \in I_3$. Sie werden zentralisiert von $X_{3\alpha+\beta}$ und $X_{3\alpha+2\beta}$. Um diese Vertreter auf Konjugiertheit in P zu testen, genügt es also mit Elementen b der Form

$$b = x_\alpha(r)n_\alpha h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})x_\alpha(s)x_\beta(t)x_{\alpha+\beta}(u)x_{2\alpha+\beta}(v)$$

zu konjugieren. Durch Nachrechnen sieht man, dass $bx(a')b^{-1}$ nicht in U_P enthalten ist. Insbesondere sind also die Vertreter $x(a')$ und $x(a'')$ für $a' \neq a''$ nicht konjugiert in $Bn_\alpha B$. Da sie nach Konstruktion auch nicht in B konjugiert sind, sind also $x(a')$ und $x(a'')$ für $a' \neq a''$ auch nicht konjugiert in P . Die Klassen $c_{1,17}^B(a')$ fusionieren also jeweils in eine eigene Konjugiertenklasse in P , die mit $c_{1,9}^P(a')$ bezeichnet werde. Für die Zentralisatoren ergibt sich insbesondere $C_P(x(a')) = C_B(x(a'))$, also

$$|C_P(x(a'))| = |C_B(x(a'))| = q^6.$$

$c_{1,18}^B$:

Der Repräsentant dieser Klasse ist $x := x_\alpha(1)x_\beta(1)$. Dies ist die Klasse der regulären unipotenten Elemente, und es gilt $C_G(x) \subseteq B$, also insbesondere $C_P(x) = C_B(x)$. Es ergibt sich daher:

$$|C_P(x)| = |C_B(x)| = q^4.$$

Damit sind alle Aussagen aus Satz 3.5.4 bewiesen. ■

Gemischte Klassen

In diesem Abschnitt wollen wir die Bestimmung der Konjugiertenklassen von P abschließen. Ziel ist der Beweis des folgenden Satzes.

3.5.5 Satz (Konjugiertenklassen von P)

Die maximale parabolische Untergruppe P von $G = {}^3D_4(q)$ besitzt genau $q^4 + q^3 + q^2 + 3q + 7$ Konjugiertenklassen. Ein Vertretersystem für die Konjugiertenklassen ist in Tabelle A.25 im Anhang gegeben.

Beweis: Um eine vollständige Liste der Konjugiertenklassen von P zu bekommen, müssen wir die unipotenten Konjugiertenklassen der Zentralisatoren der halbeinfachen Elemente von P bestimmen.

Wir beginnen mit den halbeinfachen Konjugiertenklassen vom Typ h_1 , also der Konjugiertenklasse des Einselementes. Die zugehörigen unipotenten Konjugiertenklassen des Zentralisators sind genau die unipotenten Konjugiertenklassen von P . Diese wurden bereits im vorangegangenen Abschnitt („Unipotente Klassen“) bestimmt. Dies liefert die Konjugiertenklassen vom Typ $c_{1,0}, \dots, c_{1,10}$ in Tabelle A.25 und die zugehörigen Zentralisatorordnungen.

Als nächstes betrachten wir die halbeinfachen Klassentypen h_3, h_5, h_6, h_7, h_8 und h_9 von P . Wählt man die Vertreter der zu diesen Klassentypen gehörigen halbeinfachen

Konjugiertenklassen von P wie in Tabelle A.23, so haben wir bereits im Unterabschnitt „Halbeinfache Klassen“ gesehen, dass die zugehörigen Zentralisatoren in $\mathbf{B}$ liegen. Die zugehörigen unipotenten Konjugiertenklassen der Zentralisatoren sowie die zugehörigen Zentralisatorordnungen können wir also einfach der Tabelle A.11 im Anhang entnehmen. Dies liefert die Konjugiertenklassen vom Typ $c_{3,j}$, $c_{5,j}$, $c_{6,j}$, $c_{7,j}$, $c_{8,j}$ und $c_{9,0}$ in Tabelle A.25 und die zugehörigen Zentralisatorordnungen.

Nun betrachten wir den halbeinfachen Klassentyp h_4 von P . Als Vertreter der zugehörigen halbeinfachen Konjugiertenklassen kann man laut Tabelle A.23 die Elemente

$$h(t, t^2, t, t) \text{ mit } t \in \mathbb{F}, t^{q-1} = 1, t^2 \neq 1$$

wählen. Im Unterabschnitt „Halbeinfache Klassen“ hatten wir bereits

$$C_P(h(t, t^2, t, t)) = L_P$$

gesehen. Man kann also die gemischten Konjugiertenklassen von P mit halbeinfachem Anteil vom Typ h_4 zusammen mit den Zentralisatorordnungen in P einfach der Tabelle A.17 im Anhang entnehmen. Dies liefert die Konjugiertenklassen vom Typ $c_{4,j}$ in Tabelle A.25 und die zugehörigen Zentralisatorordnungen.

Als nächstes wollen wir den halbeinfachen Klassentyp h_2 von P untersuchen. Im Einklang mit Tabelle A.23 wählen wir $h(-1, 1, -1, -1)$ als Vertreter für die zum Klassentyp h_2 von P gehörige halbeinfache Konjugiertenklasse. Im Unterabschnitt „Halbeinfache Klassen“ hatten wir bereits

$$C_2 := C_P(h(-1, 1, -1, -1)) = L_P X_{3\alpha+2\beta} \tag{3.5}$$

gesehen. Es sind

$$\begin{aligned} u_1 &:= x_{3\alpha+2\beta}(1), \\ u_2 &:= x_\alpha(1), \\ u_3 &:= x_\alpha(1)x_{3\alpha+2\beta}(-1), \\ u_4 &:= x_\alpha(1)x_{3\alpha+2\beta}(-\zeta) \end{aligned}$$

nichttriviale unipotente Elemente von C_2 . Die Elemente u_i , $i = 1, \dots, 4$ sind in C_2 paarweise nicht konjugiert, da sie in unterschiedlichen unipotenten Konjugiertenklassen von P liegen (die wir ja bereits kennen). Wir wollen $|C_{C_2}(u_i)|$ für $i = 1, \dots, 4$ berechnen. Im Unterabschnitt „Unipotente Klassen“ hatten wir $C_P(u_1)$ explizit berechnet. Hieraus ergibt sich mit (3.5):

$$|C_{C_2}(u_1)| = |C_P(u_1) \cap L_P X_{3\alpha+2\beta}| = q^4(q^6 - 1).$$

Für $u_2, \dots, u_4$ gilt: $C_{C_2}(u_i) \subseteq \mathbf{B}$. Die Zentralisatoren $C_B(u_i)$, $i = 2, \dots, 4$, haben wir in Abschnitt 3.2, „Unipotente Klassen“ bereits explizit bestimmt. Die in Tabelle A.25

angegebenen Zentralisatorordnungen zu $c_{2,2}$, $c_{2,3}$ und $c_{2,4}$ folgen dann durch Einsetzen in die Gleichung

$$|C_{C_2}(u_i)| = C_B(u_i) \cap L_F X_{3\alpha+2\beta}$$

für $i = 2, \dots, 4$. Dies liefert die Konjugiertenklassen vom Typ $c_{2,0}$, $c_{2,1}$, $c_{2,2}$, $c_{2,3}$ und $c_{2,4}$ in Tabelle A.25 und die zugehörigen Zentralisatorordnungen.

Nun betrachten wir den halbeinfachen Klassentyp h_{10} von P . Als Vertreter der zugehörigen halbeinfachen Konjugiertenklassen kann man laut Tabelle A.23 die Elemente

$$h(t, 1, t^{-q}, t^{q-1}) \text{ mit } t \in \mathbb{F}, t^{q^2-q+1} = 1, t \neq 1$$

wählen. In Abschnitt 3.1 hatten wir bereits den Zentralisator

$$C_G(h(t, 1, t^{-q}, t^{q-1}))$$

explizit berechnet. Aus (3.2) und (3.3) in Abschnitt 3.1 kann man

$$C_{10} := C_P(h(t, 1, t^{-q}, t^{q-1}))$$

explizit ablesen. Es sind

$$\begin{aligned} u_1 &:= x_{3\alpha+2\beta}(1) \text{ und} \\ u_2 &:= x_\beta(s)x_{3\alpha+\beta}(s^q)x_{3\alpha+2\beta}(r) \end{aligned}$$

mit r, s wie in Tabelle A.7 nichttriviale unipotente Elemente von C_{10} . Die Elemente u_1 und u_2 sind in C_{10} nicht konjugiert, da sie sogar in G nicht konjugiert sind (dies folgt aus Tabelle A.7). Wegen $C_{10} \subseteq \mathbf{B}$ lassen sich $C_{C_{10}}(u_1)$ und $C_{C_{10}}(u_2)$ explizit berechnen. Für ihre Ordnungen erhält man:

$$\begin{aligned} |C_{C_{10}}(u_1)| &= q^3(q^3 + 1) \text{ und} \\ |C_{C_{10}}(u_2)| &= q^2(q^2 - q + 1). \end{aligned}$$

Dies liefert die Aussagen über die Konjugiertenklassen vom Typ $c_{10,j}$ in Tabelle A.25, inklusive der zugehörigen Zentralisatorordnungen.

Die Aussagen in Tabelle A.25 über die Klassentypen $c_{11,0}$ und $c_{11,1}$ erhält man analog zu denen über $c_{10,0}$ und $c_{10,1}$, die Rechnungen sind hierbei sogar deutlich einfacher. Dies liefert die Konjugiertenklassen vom Typ $c_{11,0}$ und $c_{11,1}$ in Tabelle A.25 und die zugehörigen Zentralisatorordnungen.

Die halbeinfachen Elemente vom halbeinfachen Klassentyp h_{12} in P sind regulär. Insbesondere enthält ihr Zentralisator keine nichttrivialen unipotenten Elemente. Dies liefert die Konjugiertenklassen vom Typ $c_{12,0}$ in Tabelle A.25 sowie die zugehörigen Zentralisatorordnungen.

Zum Nachweis dafür, dass alle Konjugiertenklassen von P gefunden wurden, summiert man die Klassenlängen und erhält die Gruppenordnung $|P|$. Damit ist der Beweis von Satz 3.5.5 abgeschlossen. ■

Die Bezeichnung der Klassentypen von P in Tabelle A.25 nehmen wir wie bei $\mathbf{G}^F = {}^3D_4(q)$ vor (vergleiche den Unterabschnitt „Gemischte Klassen“ in Abschnitt 3.1). Wenn wir betonen wollen, dass der Klassentyp $c_{i,j}$ Konjugiertenklassen in P bezeichnet, so schreiben wir auch $c_{i,j}^P$.

Fusionen der Konjugiertenklassen von $\mathbf{P}^F$ in $\mathbf{G}^F$

In diesem Abschnitt wollen wir die Fusionen der Konjugiertenklassen von $P = \mathbf{P}^F$ in $G = \mathbf{G}^F$ beschreiben, d.h. wir geben bezüglich der von uns gewählten Parametrisierung der Konjugiertenklassen von P bzw. G eine explizite Beschreibung der Abbildung, die jeder Konjugiertenklasse c^P von P die Konjugiertenklasse c^G von G zuordnet. Für die Klassentypen $c_{1,j}^P$ bis $c_{9,j}^P$ ergeben sich die Fusionen aus den Fusionen von B in G (siehe Tabelle A.12 im Anhang) und für die Klassentypen $c_{10,j}^P$ bis $c_{12,j}^P$ sind die Fusionen klar, da die für die Klassen in P gewählten Vertreter mit den für die entsprechenden Klassen in G gewählten übereinstimmen. Die Fusionen der Konjugiertenklassen von P in G sind in Tabelle A.27 im Anhang aufgelistet.

Fusionen der Konjugiertenklassen von P in L_P

In diesem Abschnitt wollen wir die Fusionen der Konjugiertenklassen von $P = \mathbf{P}^F$ in $L_P = (\mathbf{L}_P)^F$ beschreiben, wobei wir L_P vermöge der Levi-Zerlegung als Faktor von P auffassen. D.h. wir geben bezüglich der von uns gewählten Parametrisierung der Konjugiertenklassen von P bzw. L_P eine explizite Beschreibung der Abbildung, die jeder Konjugiertenklasse c^P von P die Konjugiertenklasse $\bar{c}^{L_P}$ von L_P zuordnet, wobei $\bar{c}$ das Bild von c unter dem kanonischen Epimorphismus von P auf L_P bezeichne. Da in Tabelle A.25 bereits jeder Vertreter in der Form xu mit $x \in L_P$ und $u \in U_P$ geschrieben ist, lassen sich diese Fusionen ohne weitere Rechnung aus den Tabellen A.16, A.17, A.24 und A.25 ablesen. Die Fusionen der Konjugiertenklassen von P in L_P sind in Tabelle A.28 im Anhang aufgelistet.

3.6 Konjugiertenklassen einer weiteren maximalen parabolischen Untergruppe

In diesem Abschnitt werden die Konjugiertenklassen einer weiteren maximalen parabolischen Untergruppe P von $\mathbf{G}^F$ bestimmt. Wir behalten die Bezeichnungen aus Kapitel 2 bei. Es sei weiterhin $\mathbf{G}$ die in Kapitel 2 beschriebene einfache algebraische Gruppe von adjungiertem Typ mit Dynkin-Diagramm D_4 und $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ der dort konstruierte Frobeniusmorphismus. Auch in diesem Abschnitt verlangen wir stets, dass q ungerade ist.

Wir betrachten die Teilmenge $J := \{r_2\}$ von Δ . Es sei $\mathbf{Q}$ die Standard-parabolische Untergruppe von $\mathbf{G}$ zur Menge J , also

$$\mathbf{Q} = \langle \mathbf{B}, n_{r_2} \rangle,$$

wobei auf der rechten Seite das Untergruppenerzeugnis (als abstrakte oder algebraische Untergruppe) von $\mathbf{G}$ gemeint ist. $\mathbf{Q}$ ist eine zusammenhängende abgeschlossene Untergruppe von $\mathbf{G}$, die wegen $\rho r_2 = r_2$ ist $\mathbf{Q}$ zusätzlich F -stabil ist. Also ist $\mathbf{Q}$ eine rationale parabolische Untergruppe von $\mathbf{G}$. Wir definieren die Untergruppe

$$Q := (\mathbf{Q})^F = \langle \mathbf{B}^F, n_\beta \rangle.$$

Also ist Q eine parabolische Untergruppe der endlichen Gruppe $G = \mathbf{G}^F = {}^3D_4(q)$. Für die Ordnung von Q gilt:

$$|Q| = |\mathbf{Q}^F| = q^{12}(q^3 - 1)(q^2 - 1).$$

Auch $\mathbf{Q}$ und Q besitzen Levi-Zerlegungen:

3.6.1 Satz (Levi-Zerlegung von $\mathbf{Q}$ und Q)

Es seien wie oben

$$\mathbf{L}_Q = \langle \mathbf{T}, X_{r_2}, X_{-r_2} \rangle$$

und

$$L_Q = (\mathbf{L}_Q)^F = \langle \mathbf{T}^F, X_\beta, X_{-\beta} \rangle.$$

Es seien ferner:

$$\mathbf{U}_Q := \prod_{\substack{r \in \Phi^+ \\ r \neq r_2}} X_r$$

und

$$U_Q := (\mathbf{U}_Q)^F = X_\alpha X_{\alpha+\beta} X_{2\alpha+\beta} X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}.$$

Dann ist $\mathbf{Q}$ das semidirekte Produkt:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{L}_Q \ltimes \mathbf{U}_Q,$$

und Q ist das semidirekte Produkt:

$$Q = L_Q \ltimes U_Q.$$

Beweis: Dies folgt aus Proposition 2.6.4 in Carter [7], wenn man noch beachtet, dass $\mathbf{G}$ und $G = \mathbf{G}^F$ Gruppen mit zerfallenden BN -Paaren sind. ■

U_Q bzw. U_Q sind das *unipotente Radikal* von $\mathbf{Q}$ beziehungsweise Q , und L_Q beziehungsweise L_Q sind *Levi-Komplemente* von $\mathbf{Q}$ beziehungsweise Q .

Bei der Bestimmung der Konjugiertenklassen von Q gehen wir so wie bei der Berechnung der Konjugiertenklassen von P vor. Da die Rechnungen analog verlaufen und die gleichen Methoden verwenden, geben wir nur die Ergebnisse an.

Maximale Tori

Ein Vertretersystem der Q -Konjugiertenklassen der F -stabilen maximalen Tori von $\mathbf{Q}$ ist durch Tabelle A.19 im Anhang gegeben.

Halbeinfache Konjugiertenklassen

Die Bestimmung der halbeinfachen Konjugiertenklassen von Q verläuft analog zur Berechnung der halbeinfachen Konjugiertenklassen von P . Es gilt:

3.6.2 Satz (Halbeinfache Klassentypen von Q)

Die parabolische Untergruppe $Q = \mathbf{Q}^F$ besitzt genau 11 halbeinfache Klassentypen. Vertreter für die zu diesen halbeinfachen Klassentypen gehörigen Konjugiertenklassen können so gewählt werden wie in Tabelle A.29 im Anhang angegeben.

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 3.5.2. ■

Hinsichtlich der Bezeichnung der halbeinfachen Klassentypen h_i von Q gehen wir wie üblich vor: Wenn wir betonen wollen, dass der halbeinfache Klassentyp h_i eine Vereinigung von Konjugiertenklassen in Q bezeichnet, so schreiben wir auch h_i^Q .

Parametrisierung der halbeinfachen Klassen

Die Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von $Q = \mathbf{Q}^F$ nehmen wir analog zur Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von $\mathbf{G}^F$ vor. Die Vertreter und Parameterbereiche sind in Tabelle A.30 im Anhang aufgeführt.

Unipotente und gemischte Klassen

Die Bestimmung der unipotenten und gemischten Klassen von Q verläuft analog zu den entsprechenden Rechnungen für P . Wir geben daher hier nur die Ergebnisse an:

3.6.3 Satz (Konjugiertenklassen von Q)

Die maximale parabolische Untergruppe Q besitzt genau $q^4 + 2q^3 + q^2 + 3q + 7$ Konjugiertenklassen. Ein Vertretersystem für diese Klassen ist in Tabelle A.31 im Anhang gegeben.

Beweis: Analog zum Beweis der Sätze 3.5.4 und 3.5.5. ■

Die Bezeichnung der Klassentypen von Q in Tabelle A.31 nehmen wir wie bei $\mathbf{G}^F = {}^3D_4(q)$ vor (vergleiche den Unterabschnitt „Gemischte Klassen“ in Abschnitt 3.1). Wenn wir betonen wollen, dass der Klassentyp $c_{i,j}$ Konjugiertenklassen in Q bezeichnet, so schreiben wir auch $c_{i,j}^Q$.

Fusionen der Konjugiertenklassen von Q in G und von Q in L_Q

Die Fusionen der Konjugiertenklassen von Q in G und von Q in L_Q (wobei wir L_Q als Faktor von Q auffassen) lassen sich mit den gleichen Methoden berechnen wie die entsprechenden Fusionen von P . Wir verzichten daher auf die Angabe der Beweise. Die Ergebnisse sind in den Tabellen A.32 und A.33 aufgelistet.

3.7 Konjugiertenklassen eines Zentralisators

Wir behalten die Bezeichnungen aus Kapitel 2 bei. Insbesondere sei weiterhin $G = {}^3D_4(q)$, wobei wir die Voraussetzung beibehalten, dass q ungerade ist. Es sei $t \in \mathbb{F}$ mit $t^{q^2+q+1} = 1$, $t \neq 1$. Wir betrachten die von $h := h(t, 1, t^q, t^{q^2})$ erzeugte zyklische Untergruppe von P , die wir mit D bezeichnen wollen. In diesem Abschnitt wollen wir die Konjugiertenklassen des Zentralisators von D in P bestimmen.

Offenbar gilt: $C_P(D) = C_P(h)$. Wie man der Tabelle A.25 entnehmen kann, gilt außerdem $|C_P(h)| = q^3(q^3 - 1)(q - 1)$. Mit Tabelle A.11 und den Relationen aus Abschnitt 2.3 folgt weiter $C_P(h) = TX_\beta X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}$. Also gilt:

$$C_P(D) = TX_\beta X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}.$$

Insbesondere hängt $C_P(D)$ nicht von der Wahl von t ab (solange nur $t^{q^2+q+1} = 1$ und $t \neq 1$ ist). Bei der Bestimmung der Konjugiertenklassen von $C_P(D)$ nutzen wir aus, dass $C_P(D)$ eine Untergruppe der Boreluntergruppe B ist. Für jeden Konjugiertenklassenvertreter x aus Tabelle A.11, der in $C_P(D)$ enthalten ist, lässt sich $C_{C_P(D)}(x)$ vermöge $C_{C_P(D)}(x) = C_B(x) \cap C_P(D)$ berechnen. Hieraus erhalten wir auch die zugehörigen Konjugiertenklassenlangen in $C_P(D)$. Aufsummieren dieser Klassenlangen zeigt, dass wir auf

diese Weise bereits ein Vertretersystem für die Konjugiertenklassen von $C_P(D)$ gefunden haben.

In der Tabelle [A.34](#) sind die Ergebnisse zusammengefasst. Als Vertreter für die halbeinfachen Konjugiertenklassen von $C_P(D)$ wählen wir die gleichen Vertreter wie für die halbeinfachen Konjugiertenklassen der Boreluntergruppe B . Bezeichnung und Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von $C_P(D)$ können daher den Tabellen [A.8](#) und [A.9](#) entnommen werden.

Kapitel 4

Charaktere parabolischer Untergruppen von ${}^3D_4(q)$

Parabolische Untergruppen spielen sowohl in der gewöhnlichen als auch in der modularen Darstellungstheorie endlicher Gruppen vom Lie-Typ eine wichtige Rolle. Man denke beispielsweise an die Theorie der Harish-Chandra-Induktion, deren Gegenstand bestimmte Moduln und Charaktere sind, die durch Induktion von parabolischen Untergruppen konstruiert werden.

Bei der Betrachtung der Trialitätsgruppen setzen wir weiterhin voraus, dass q ungerade ist. Im vorangegangenen Kapitel hatten wir eine maximale parabolische Untergruppe P der Steinbergschen Trialitätsgruppen ${}^3D_4(q)$ genauer untersucht. In diesem Kapitel befassen wir uns mit der gewöhnlichen Darstellungstheorie von P . Ziel ist die Berechnung der generischen Charaktertafel von P . Wir werden die Charaktertafel von P im nächsten und im übernächsten Kapitel dazu benutzen, neue Aussagen über die Zerlegungszahlen der Trialitätsgruppen zu beweisen. Bei der Bestimmung der Charaktertafel von P stehen uns die folgenden drei Methoden zur Verfügung:

- Die Levi-Zerlegung von P und Clifford-Theorie:
Bereits in Abschnitt 3.5 hatten wir gesehen, dass sich die parabolische Untergruppe P als semidirektes Produkt aus dem Levi-Komplement L_P und dem unipotenten Radikal U_P schreiben lässt (Levi-Zerlegung). In einer solchen Situation lassen sich irreduzible Charaktere von P folgendermassen erzeugen: Da U_P ein Normalteiler von P ist, operiert P per Konjugation auf den irreduziblen Charakteren von U_P . Die zugehörigen Stabilisatoren in P heißen Trägheitsgruppen. Die Clifford-Theorie beschreibt explizit, wie man durch Induktion gewisser irreduzibler Charaktere dieser Trägheitsgruppen irreduzible Charaktere von P erzeugen kann. Dieser Clifford-theoretische

Zugang wird im nächsten Kapitel bei der Behandlung der modularen Darstellungstheorie von P noch von besonderer Bedeutung sein. Die Clifford-theoretische Vorgehensweise liefert prinzipiell alle irreduziblen Charaktere von P . Zur praktischen Berechnung dieser Charaktere ist es jedoch häufig einfacher, die beiden folgenden Möglichkeiten zur Konstruktion irreduzibler Charaktere von P zu nutzen:

- **Einschränken der irreduziblen Charaktere von ${}^3D_4(q)$:**
Die Charaktertafeln der Trialitätsgruppen wurden von Spaltenstein in [39] und Deriziotis und Michler in [14] bestimmt. Wir werden nur Einschränkungen unipotenter Charaktere von ${}^3D_4(q)$ benutzen.
- **Induzieren irreduzibler Charaktere der Boreluntergruppe $B = \mathbf{B}^F$:**
Da B eine M -Gruppe ist, lassen sich irreduzible Charaktere von B durch Induktion linearer Charaktere gewinnen und sind somit auch generisch relativ gut berechenbar. Wir werden einige Charaktere von P konstruieren, indem wir irreduzible Charaktere von B nach P induzieren.

Mit den gleichen Methoden berechnen wir in diesem Kapitel auch noch einen großen Teil der Charaktertafel der anderen maximalen parabolischen Untergruppe Q von G . Viele der in diesem Kapitel vorgenommenen Berechnungen, beispielsweise von Skalarprodukten und Normen von Charakteren, wurden mit Hilfe des **Maple**-Teils des Computeralgebrapaketes **CHEVIE** (siehe [8] und [21]) durchgeführt. Zusätzlich wurden eigene **Maple**-Programme, basierend auf **CHEVIE**, zum Einschränken, Induzieren und Inflationieren von Charakteren zwischen generischen Charaktertafeln entwickelt und bei den in diesem Kapitel beschriebenen Berechnungen benutzt.

Der Einsatz der Computerprogramme bietet zwei Vorteile: Zum einen erleichtern sie die mühsame Berechnung von Normen und Skalarprodukten erheblich und verringern so die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Rechenfehlern. Zum anderen ermöglichen sie gute Tests für Charaktere, beispielsweise die Überprüfung der Orthogonalitätsrelationen für die Charaktertafel von P und die irreduziblen Charaktere von Q .

Die hier vorgestellten und benutzten Methoden lassen sich prinzipiell auch allgemeiner zur Berechnung von Konjugiertenklassen parabolischer Untergruppen in beliebigen endlichen Gruppen vom Lie-Typ verwenden.

4.1 Charaktertheoretische Hilfsmittel

In diesem Abschnitt stellen wir einige charaktertheoretische Hilfsmittel zusammen, die wir im weiteren Verlauf der Arbeit benötigen werden. Wir werden in diesem Abschnitt ausnahmsweise von der in den anderen Abschnitten benutzten Notation abweichen. Mit G bezeichnen wir in diesem Abschnitt eine beliebige endliche Gruppe, N ist ein beliebiger Normalteiler von G und ζ eine Klassenfunktion von G . (Erst im nächsten Abschnitt 4.2 werden wir zu unserer üblichen Notation zurückkehren.)

Für eine endliche Gruppe G und Klassenfunktionen φ und ψ von G sei $(\varphi, \psi)_G$ das innere Produkt der beiden Klassenfunktionen. Wenn aus dem Kontext ersichtlich ist, dass φ und ψ Klassenfunktionen von G sind, so schreiben wir auch kurz (φ, ψ) statt $(\varphi, \psi)_G$.

Ist H eine Untergruppe der endlichen Gruppe G und φ eine Klassenfunktion von H , so schreiben wir $\varphi \uparrow^G$ oder auch φ^G für die durch φ induzierte Klassenfunktion. Es gilt bekanntlich für alle $g \in G$:

$$\varphi^G(g) = \sum_{t \in T} \varphi^\circ(tgt^{-1}), \quad (4.1)$$

wobei T eine beliebige Transversale für die Rechtsnebenklassen von H in G ist und φ° durch

$$\varphi^\circ(h) = \begin{cases} \varphi(h) & \text{für } h \in H \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert ist. Für eine Klassenfunktion ψ von G schreiben wir $\psi \downarrow_H$ oder auch ψ_H für die Klassenfunktion von H , die durch Einschränkung von ψ auf H entsteht. Ein weiterer, effizienter Weg zur Berechnung von $\varphi^G(g)$ ist der folgende: Man wähle Vertreter $x_1, \dots, x_m$ für die Konjugiertenklassen von H , die in der Konjugiertenklasse g^G von g in G enthalten sind. Aus (4.1) folgt dann:

$$\varphi^G(g) = |C_G(g)| \sum_{i=1}^m \frac{\varphi(x_i)}{|C_H(x_i)|}, \quad (4.2)$$

wobei $\varphi^G(g) = 0$ sei, falls $H \cap g^G = \emptyset$ ist.

Wir stellen nun einige allgemeine Sätze zusammen, die bei der Berechnung von Charaktertafeln in den nächsten Abschnitten von Nutzen sein werden. Wir beginnen mit einem allgemeinen Resultat von R. Brauer.

4.1.1 Lemma (Brauers Permutationslemma)

Es sei G eine endliche Gruppe. Eine endliche Gruppe A operiere

- (a) auf den irreduziblen Charakteren von G vermöge $\chi \mapsto \chi^a$ und

- (b) auf den Elementen von G vermöge $g \mapsto {}^a g$, so dass ${}^a g$ und ${}^a g'$ genau dann in G konjugiert sind, wenn g und g' in G konjugiert sind.

Es gelte ferner:

$$\chi^a(g) = \chi({}^a g)$$

für alle $a \in A$ und $g \in G$. Dann ist für jedes $a \in A$ die Anzahl der von a festgelassenen Konjugiertenklassen von G gleich der Anzahl der von a festgelassenen irreduziblen Charaktere von G , und die Anzahl der Bahnen von A auf den Konjugiertenklassen von G ist gleich der Anzahl der Bahnen von A auf den irreduziblen Charakteren von G .

Beweis: Siehe Huppert [29], Satz V.13.5. ■

4.1.2 Satz (Gallagher)

Es sei N ein Normalteiler einer endlichen Gruppe G und $\zeta \in \text{Irr}(G)$ mit $\vartheta := \zeta_N \in \text{Irr}(N)$. Wir setzen

$$\mathcal{S} := \{\psi \in \text{Irr}(G) \mid \psi_N = m \cdot \mathbf{1}_N \text{ für ein } m \in \mathbb{N}\}$$

und

$$\mathcal{T} := \{\psi \in \text{Irr}(G) \mid (\psi_N, \vartheta)_N \neq 0\}.$$

Dann ist durch

$$\psi \mapsto \psi\zeta$$

eine Bijektion von $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{T}$ definiert. Es gilt

$$\vartheta^G = \sum_{\psi \in \mathcal{S}} e_\psi \cdot \psi\zeta$$

mit $e_\psi = \psi(1)$.

Beweis: Siehe Corollary (6.17) und die daran anschließenden Bemerkungen in Isaacs [30]. ■

Es sei H eine Untergruppe von G und ϑ eine Klassenfunktion von H . Dann ist für jedes $x \in G$ eine Klassenfunktion ϑ^x von H definiert durch

$$\vartheta^x(h) = \begin{cases} \vartheta(xhx^{-1}) & , \text{ falls } xhx^{-1} \in H, \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

für $h \in H$.

Falls H ein Normalteiler von G ist, operiert G auf diese Weise auf der Menge $\text{Irr}(H)$, und für $\vartheta \in \text{Irr}(H)$ sagt man, dass ϑ^x und ϑ in G konjugiert sind.

4.1.3 Satz (Clifford)

Es sei N ein Normalteiler einer endlichen Gruppe G und $\chi \in \text{Irr}(G)$. Es sei ϑ ein irreduzibler Konstituent von χ_N , und es seien $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_t$ die verschiedenen zu ϑ konjugierten irreduziblen Charaktere von N . Dann gilt:

$$\chi_N = e \sum_{i=1}^t \vartheta_i$$

mit $e := (\chi_N, \vartheta)_N$.

Beweis: Siehe Theorem (6.2) in Isaacs [30]. ■

4.1.4 Definition (Trägheitsgruppen)

Es sei N ein Normalteiler einer endlichen Gruppe G und $\vartheta \in \text{Irr}(N)$. Die Gruppe

$$I_G(\vartheta) := \{g \in G \mid \vartheta^g = \vartheta\}$$

wird *Trägheitsgruppe* von ϑ in G genannt. Gilt $I_G(\vartheta) = G$, so heißt ϑ *invariant* unter G .

4.1.5 Satz (Clifford)

Es sei N ein Normalteiler einer endlichen Gruppe G und $\vartheta \in \text{Irr}(N)$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &:= \{\psi \in \text{Irr}(I_G(\vartheta)) \mid (\psi_N, \vartheta) \neq 0\} \text{ und} \\ \mathcal{B} &:= \{\zeta \in \text{Irr}(G) \mid (\zeta_N, \vartheta) \neq 0\}. \end{aligned}$$

Dann gilt: Ist $\psi \in \mathcal{A}$, so ist ψ^G irreduzibel. Die Abbildung $\psi \mapsto \psi^G$ ist eine Bijektion von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$.

Beweis: Siehe Theorem (6.11) in Isaacs [30]. ■

4.1.6 Definition

Es sei N ein Normalteiler einer Gruppe G und φ ein Charakter von G/N . Dann definieren wir $\widehat{\varphi}$ als Klassenfunktion von G durch $\widehat{\varphi}(g) := \varphi(gN)$. Wir nennen $\widehat{\varphi}$ die *Inflation* von φ auf G .

Die Funktion $\widehat{\varphi}$ ist ein Charakter von G mit $N \leq \ker(\widehat{\varphi})$.

4.1.7 Satz

Es sei N ein abelscher Normalteiler einer endlichen Gruppe G und K ein Komplement von N . Es sei φ ein irreduzibler Charakter von N , der invariant unter G ist. Dann gibt

es genau einen irreduziblen Charakter η von G mit $\eta_K = 1_K$ und $\eta_N = \varphi$. Ist τ ein irreduzibler Charakter von G mit $(\tau_N, \varphi)_N \neq 0$, so ist τ_K irreduzibel. Ist $\tau = \widehat{\psi}\eta$ für ein $\psi \in \text{Irr}(K)$, so ist τ ein irreduzibler Charakter von G mit $\tau_K = \psi$ und $(\tau_N, \varphi)_N \neq 0$.

Beweis: Siehe Lemma 9 in Jürgens [31]. ■

Notation Der Charakter $\widehat{\psi}\eta$ in Lemma 4.1.7 wird mit $\psi \ltimes \varphi$ bezeichnet.

4.1.8 Satz

Es sei N ein abelscher Normalteiler einer endlichen Gruppe G und K ein Komplement. Es seien $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ Vertreter der Bahnen der Operation von G auf $\text{Irr}(N)$. Für $i \in \{1, \dots, m\}$ setzen wir $I_i := K \cap I_G(\varphi_i)$ und wählen $\psi_i \in \text{Irr}(I_i)$. Dann ist $(\psi_i \ltimes \varphi_i)^G \in \text{Irr}(G)$, und zu jedem $\zeta \in \text{Irr}(G)$ gibt es genau ein i und genau ein $\psi \in \text{Irr}(I_i)$, so dass $(\psi \ltimes \varphi_i)^G = \zeta$.

Beweis: Dies folgt aus Satz 4.1.5 und Lemma 4.1.7 (vergleiche auch Korollar 11 in Jürgens [31]). ■

4.2 Die unipotenten Charaktere von ${}^3D_4(q)$

Von nun an verwenden wir wieder die Notationen und Bezeichnungen aus den Kapiteln 2 und 3. Es sei also q eine Potenz der Primzahl p , wobei wir p wieder als ungerade voraussetzen. Es sei ferner $\mathbf{G}$ die in Abschnitt 2.2 konstruierte einfache algebraische Gruppe von adjungiertem Typ mit Wurzelsystem D_4 und $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$ der durch (2.3) definierte Frobeniusmorphismus. Die Steinbergschen Trialitätsgruppen bezeichnen wir wieder mit $G = \mathbf{G}^F = {}^3D_4(q)$.

Die unipotenten Charaktere von G sind für uns in zweierlei Hinsicht von Bedeutung. Zum einen werden wir sie bei der Konstruktion irreduzibler Charaktere der parabolischen Untergruppe P benötigen. Zum anderen sind wir an den Zerlegungszahlen der unipotenten Charaktere von G interessiert (siehe Kapitel 6).

In diesem Abschnitt wollen wir daher die unipotenten Charaktere von $G = {}^3D_4(q)$ kurz beschreiben. Die Gruppe G besitzt genau 8 unipotente Charaktere, die wir wie auch Spaltenstein [39], Deriziotis und Michler [14] und Geck [19] mit

$$\mathbf{1}, [\varepsilon_1], [\rho_1], [\rho_2], {}^3D_4[-1], {}^3D_4[1], [\varepsilon_2], \mathbf{St}$$

bezeichnen wollen. Die Charaktere ${}^3D_4[-1]$ und ${}^3D_4[1]$ sind kuspidal, die übrigen unipotenten Charaktere gehören zur Hauptreihe von $\mathbf{G}^F$. Die Werte der unipotenten Charaktere können aus Spaltenstein [39], Table 2, oder der Bibliothek generischer Charaktertafeln in CHEVIE entnommen werden. Sie sind der Übersichtlichkeit halber noch einmal in Tabelle A.35 im Anhang angegeben.

4.3 Die Charaktertafel von L_P

Wie schon zu Beginn des Kapitels erwähnt, sind wir daran interessiert, die Charaktertafel der parabolischen Untergruppe P zu berechnen. Da wir das Levi-Komplement L_P vermöge der Levi-Zerlegung als Faktor von P auffassen können, liefert jeder irreduzible Charakter von L_P durch Inflation einen irreduziblen Charakter von P (vergleiche Definition 4.1.6). Es ist daher sinnvoll, die Charaktertafel von L_P zu bestimmen. Wie schon zu Beginn des Abschnitts 3.3 geschildert, ist L_P eine endliche Gruppe vom Lie-Typ, so dass uns zur Berechnung der Charaktertafel die Deligne-Lusztig-Theorie zur Verfügung steht. Die gegen Ende dieses Abschnitts angegebenen Berechnungen von Normen und Skalarprodukten von Klassenfunktionen von L_P wurden mit Hilfe des Maple-Teils des Computeralgebrasystems CHEVIE durchgeführt.

Wir erinnern kurz an die Definition der Levi-Untergruppe L_P aus Abschnitt 3.3: Unser Ausgangspunkt war die in Kapitel 2 eingeführte einfache algebraische Gruppe von adjungiertem Typ mit Dynkin-Diagramm D_4 und der dort konstruierte Frobeniusmorphismus $F : \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$. Wir setzen auch in diesem Abschnitt die dort auftretende Primzahlpotenz q als ungerade voraus. Wir hatten dann die F -stabile zusammenhängende reduktive Untergruppe $\mathbf{L}_P$ von $\mathbf{G}$ definiert als die Standard-Levi-Untergruppe zur Menge von einfachen Wurzeln $\{r_1, r_3, r_4\}$. Die Einschränkung von F auf $\mathbf{L}_P$ ist dann ein Frobeniusmorphismus der zusammenhängenden reduktiven algebraischen Gruppe $\mathbf{L}_P$. Die Levi-Untergruppe L_P haben wir dann als die Gruppe von Fixpunkten $L_P := (\mathbf{L}_P)^F$ definiert, womit sie zu einer endlichen Gruppe vom Lie-Typ wurde.

Es sei $\tilde{\mathbf{T}}$ ein beliebiger rationaler maximaler Torus von $\mathbf{L}_P$ und θ ein beliebiger irreduzibler (komplexwertiger) Charakter der endlichen abelschen Gruppe $\tilde{\mathbf{T}}^F$. Die Theorie von Deligne und Lusztig ordnet jedem solchen Paar $(\tilde{\mathbf{T}}, \theta)$ einen verallgemeinerten (komplexwertigen) Charakter $R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{L}_P} \theta$ von L_P zu. Eine Definition von $R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{L}_P} \theta$ findet man in Kapitel 7 von Carters Buch [7]. Die verallgemeinerten Charaktere

$$\{R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{L}_P} \theta \mid \tilde{\mathbf{T}} \text{ rationaler maximaler Torus von } \mathbf{L}_P, \theta \in \text{Irr}(\tilde{\mathbf{T}}^F)\}$$

heißen die *Deligne-Lusztig-Charaktere* von L_P . Der Deligne-Lusztig-Charakter $R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{\mathbf{L}_P} \theta$ hängt nur von der L_P -Konjugiertenklasse des Paares $(\tilde{\mathbf{T}}, \theta)$ ab und auf den unipotenten Klassen von L_P sogar nur von der L_P -Konjugiertenklasse von $\tilde{\mathbf{T}}$.

Die Deligne-Lusztig-Charaktere lassen sich wie folgt ausrechnen: Es sei $g \in L_P$ und $g = su = us$ mit s halbeinfach und u unipotent die Jordan-Zerlegung von g . Es sei $\mathbf{C}$ der Zentralisator von s in $\mathbf{L}_P$. Da jedes halbeinfache Element in $\mathbf{L}_P$ entweder zentral oder regulär ist (siehe Tabelle A.17 im Anhang), ist $\mathbf{C}$ zusammenhängend. Es seien $\tilde{\mathbf{T}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{T}}_k \subseteq \mathbf{C}$ Repräsentanten der $\mathbf{C}^F$ -Konjugiertenklassen rationaler maximaler Tori von $\mathbf{C}$, die in der L_P -Konjugiertenklasse des Torus $\tilde{\mathbf{T}}$ von $\mathbf{L}_P$ liegen. Ist $x \in L_P$ mit

$s' := s^x \in \tilde{\mathbf{T}}^F$, so hängt die $\mathbf{C}^F$ -Konjugiertenklasse von ${}^x\tilde{\mathbf{T}}$ nur von s' (und nicht vom speziellen x) ab. Es seien also $s_{r1}, \dots, s_{rl_r} \in \tilde{\mathbf{T}}^F$ für $1 \leq r \leq k$ die verschiedenen Elemente der Form $s^x \in \tilde{\mathbf{T}}^F$ mit $x \in L_P$, für die der Torus ${}^x\tilde{\mathbf{T}}$ in der $\mathbf{C}^F$ -Konjugiertenklasse von $\tilde{\mathbf{T}}_r$ liegt. Dann ist:

$$(R_{\tilde{\mathbf{T}}}^{L_P} \theta)(g) = \sum_{r=1}^k \left(\sum_{t=1}^{l_r} \theta(s_{rt}) \right) Q_{\tilde{\mathbf{T}}_r}^{\mathbf{C}}(u), \quad (4.3)$$

wobei $Q_{\tilde{\mathbf{T}}_r}^{\mathbf{C}}$ die Greenfunktion von $\mathbf{C}^F$ zum Torus $\tilde{\mathbf{T}}_r$ ist (vergleiche Abschnitt 2.1 in Lübeck [34]).

In L_P gibt es genau zwei L_P -Konjugiertenklassen rationaler maximaler Tori, wie man der Tabelle A.14 im Anhang entnehmen kann. Dort hatten wir auch bereits zwei Repräsentanten $\mathbf{T}_0$ und $\mathbf{T}_2$ für diese beiden Konjugiertenklassen gewählt.

Um die Deligne–Lusztig–Charaktere mit Hilfe der Charakterformel (4.3) berechnen zu können, benötigen wir die Werte der Greenfunktionen aller Zentralisatoren halbeinfacher Elemente von $(L_P)^F$. In L_P gibt es nach Tabelle A.15 genau drei halbeinfache Klassentypen h_1 , h_2 und h_3 . Zur Abkürzung wollen wir die zugehörigen Zentralisatoren in L_P mit $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$ bzw. $\mathbf{C}_3$ bezeichnen. Wir setzen weiter $C_1 := \mathbf{C}_1^F$, $C_2 := \mathbf{C}_2^F$, und $C_3 := \mathbf{C}_3^F$. Die Konjugiertenklassen vom Typ h_1 sind zentral, die Klassen vom Typ h_2 sind regulär und im maximalen Torus $\mathbf{T}_0$ enthalten, während die Klassen vom Typ h_3 regulär und im maximalen Torus $\mathbf{T}_2$ enthalten sind. Es gilt also:

$$\mathbf{C}_1 = L_P, \mathbf{C}_2 = \mathbf{T}_0 \text{ und } \mathbf{C}_3 = \mathbf{T}_2.$$

Wir suchen somit die Werte der Greenfunktionen $Q_{\mathbf{T}_0}^{\mathbf{C}_1}$, $Q_{\mathbf{T}_2}^{\mathbf{C}_1}$, $Q_{\mathbf{T}_0}^{\mathbf{C}_2}$ und $Q_{\mathbf{T}_2}^{\mathbf{C}_3}$. Die einzige unipotente Konjugiertenklasse von $C_2 = \mathbf{T}_0^F$ bzw. $C_3 = \mathbf{T}_2^F$ ist die Konjugiertenklasse des Einselements, auf denen $Q_{\mathbf{T}_0}^{\mathbf{C}_2}$ bzw. $Q_{\mathbf{T}_2}^{\mathbf{C}_3}$ jeweils den Wert 1 annehmen (dies folgt aus Lemma 5.1, (a) in Lübeck [34]). Damit haben wir die Greenfunktionen $Q_{\mathbf{T}_0}^{\mathbf{C}_2}$ bzw. $Q_{\mathbf{T}_2}^{\mathbf{C}_3}$ vollständig bestimmt.

Wir müssen also nur noch die Greenfunktionen $Q_{\mathbf{T}_0}^{\mathbf{C}_1}$ und $Q_{\mathbf{T}_2}^{\mathbf{C}_1}$ ausrechnen. Die einzigen unipotenten Konjugiertenklassen von $C_1 = L_P$ sind die Klasse des Einselementes und die Klasse der regulären unipotenten Elemente (siehe Tabelle A.17 im Anhang). Daher lassen sich hier die Werte von $Q_{\mathbf{T}_0}^{\mathbf{C}_1}$ und $Q_{\mathbf{T}_2}^{\mathbf{C}_1}$ aus allgemeinen Eigenschaften von Greenfunktionen berechnen. In unserem Fall ergeben sich sämtliche Werte der Greenfunktionen ohne weitere Rechnung aus Lemma 5.1, (a) in Lübeck [34]. Die Werte sind in der Tabelle 4.1 aufgeführt. Die Bezeichnungen der unipotenten Konjugiertenklassen sind aus Tabelle A.17 im Anhang entnommen.

Damit können wir nun die Werte der Deligne–Lusztig–Charaktere von L_P mit Hilfe der Charakterformel (4.3) ausrechnen. Das Ergebnis findet man in Tabelle 4.2. In dieser Tabelle haben wir die gleichen Repräsentanten für die Konjugiertenklassen von L_P gewählt wie in Tabelle A.15 im Anhang.

C_1	$c_{1,0}$	$c_{1,1}$
$Q_{\mathbf{T}_0}^{\mathbf{C}_1}$	$1 + q^3$	1
$Q_{\mathbf{T}_2}^{\mathbf{C}_1}$	$1 - q^3$	1

Tabelle 4.1: Greenfunktionen von L_P

	$s = h(t, t^2, t, t)$ $t^{q-1} = 1$	$su = h(t, t^2, t, t)x_\alpha(1)$ $t^{q-1} = 1$	$s = h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})$ $t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1,$ $t_2 \neq t_1^2$	$s = h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2})$ $t^{(q^3+1)(q-1)} = 1,$ $t^{q-1} \neq 1$
$R_{\mathbf{T}_0}^{\mathbf{L}_P} \theta$ $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}_0^F)$	$(1 + q^3)\theta(s)$	$\theta(s)$	$\theta(s) + \theta(s^{n_\alpha})$	0
$R_{\mathbf{T}_2}^{\mathbf{L}_P} \theta$ $\theta \in \text{Irr}(\mathbf{T}_2^F)$	$(1 - q^3)\theta(s)$	$\theta(s)$	0	$\theta(s) + \theta(s^{n_\alpha})$

Tabelle 4.2: Deligne–Lusztig–Charaktere von L_P

Als nächstes wollen wir eine geeignete Parametrisierung der Deligne–Lusztig–Charaktere von L_P vornehmen. Hierzu führen wir ähnliche Bezeichnungen für komplexe Einheitswurzeln ein wie in 3.1.3 für die Einheitswurzeln in $\mathbb{F}^\times$.

4.3.1 Schreibweise

Es sei $\mathbb{Q}_{p'}$ die additive Gruppe der rationalen Zahlen, die sich mit nicht durch p teilbarem Nenner schreiben lassen. Wir definieren die Einbettung $\varphi_2 : \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{C}^\times$, $\frac{r}{s} \mapsto e^{\frac{2\pi i r}{s}}$ (das Bild von φ_2 besteht genau aus den Einheitswurzeln mit zu p teilerfremder Ordnung). In der folgenden Tabelle werden für einige Elemente aus $\mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$ Namen ihrer Bilder unter φ_2 festgelegt. Diese Namen sollen im Rest der Arbeit benutzt werden, um Charakterwerte explizit hinzuschreiben:

$\mu \in \mathbb{Q}_{p'}/\mathbb{Z}$	$\varphi_2(\mu) \in \mathbb{C}^\times$
$\frac{1}{q^n-1}$	ζ_n
$\frac{1}{q^n+1}$	ξ_n
$\frac{1}{(q^n+1)(q-1)}$	η_n
$\frac{1}{(q^n-1)(q+1)}$	μ_n
$\frac{1}{\phi_n}$	φ_n

Tabelle 4.3: Notation für generische Einheitswurzeln

Zur Parametrisierung der Deligne–Lusztig–Charaktere von L_P parametrisieren wir $\text{Irr}(\mathbf{T}_0^F)$ und $\text{Irr}(\mathbf{T}_2^F)$ folgendermaßen: Für $k = 0, 1, \dots, q^3 - 2$ und $l = 0, 1, \dots, q - 2$ definieren wir den irreduziblen Charakter $\theta_{kl} \in \text{Irr}(\mathbf{T}_0^F)$ durch $\theta_{kl} : h(\tilde{\zeta}_3^i, \tilde{\zeta}_1^j, \tilde{\zeta}_3^{qi}, \tilde{\zeta}_3^{q^2i}) \mapsto \zeta_3^{ik} \zeta_1^{jl}$. Man erhält dann die Bijektion

$$\begin{aligned} \{0, 1, \dots, q^3 - 2\} \times \{0, 1, \dots, q - 2\} &\rightarrow \text{Irr}(\mathbf{T}_0^F) \\ (k, l) &\mapsto \theta_{kl}. \end{aligned}$$

Für $\text{Irr}(\mathbf{T}_2^F)$ gehen wir analog vor. Für $k = 0, 1, \dots, q^4 - q^3 + q - 2$ definieren wir den irreduziblen Charakter $\theta_k \in \text{Irr}(\mathbf{T}_2^F)$ durch $\theta_k : h(\tilde{\eta}_3^i, \tilde{\eta}_3^{(q^3+1)i}, \tilde{\eta}_3^{q^4i}, \tilde{\eta}_3^{q^2i}) \mapsto \eta_3^{ik}$. Wir erhalten dann die Bijektion

$$\begin{aligned} \{0, 1, \dots, q^4 - q^3 + q - 2\} &\rightarrow \text{Irr}(\mathbf{T}_2^F) \\ k &\mapsto \theta_k. \end{aligned}$$

Damit haben wir $\text{Irr}(\mathbf{T}_0^F)$ und $\text{Irr}(\mathbf{T}_2^F)$ parametrisiert und können die Deligne–Lusztig–Charaktere $R_{\mathbf{T}_0^F}^{\mathbf{L}_P} \theta_{kl}$ für $k = 0, 1, \dots, q^3 - 2$, $l = 0, 1, \dots, q - 2$ und $R_{\mathbf{T}_2^F}^{\mathbf{L}_P} \theta_k$ für $k = 0, 1, \dots, q^4 - q^3 + q - 2$ in einer etwas übersichtlicheren Form angeben (siehe Tabelle 4.4). Die Bezeichnung der Konjugiertenklassen von L_P in Tabelle 4.4 ist die gleiche wie in Tabelle A.17 im Anhang. Die Deligne–Lusztig–Charaktere von L_P liefern uns irreduzible Charaktere von L_P . Für $k = 0, 1, \dots, q^3 - 2$ und $l = 0, 1, \dots, q - 2$ setzen wir

$${}_{L_P}\chi_3(k, l) := R_{\mathbf{T}_0^F}^{\mathbf{L}_P} \theta_{kl},$$

und für $k = 0, 1, \dots, q^4 - q^3 + q - 2$ definieren wir

$${}_{L_P}\chi_4(k) := -R_{\mathbf{T}_2^F}^{\mathbf{L}_P} \theta_k.$$

	$c_{1,0}(i)$	$c_{1,1}(i)$	$c_{2,0}(i, j)$	$c_{3,0}(i)$
$R_{\mathbf{T}_0}^{\mathbf{L}_P} \theta_{kl}$	$(1 + q^3) \zeta_1^{ik+2il}$	ζ_1^{ik+2il}	$\zeta_3^{ik} \zeta_1^{jl} + \zeta_3^{-ik} \zeta_1^{(k+l)j}$	0
$R_{\mathbf{T}_2}^{\mathbf{L}_P} \theta_k$	$(1 - q^3) \zeta_1^{ik}$	ζ_1^{ik}	0	$\eta_3^{ik} + \eta_3^{q^3 ik}$

Tabelle 4.4: Parametrisierung der Deligne–Lusztig–Charaktere von L_P

Da wir die Operation von n_α auf $\mathbf{T}_0^F$ und $\mathbf{T}_2^F$ kennen (vergleiche Tabelle A.2 im Anhang), können wir die Normen der Deligne–Lusztig–Charaktere mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen für Deligne–Lusztig–Charaktere, Theorem 7.3.4 in Carter [7], berechnen. Man erhält hieraus, dass die verallgemeinerten Charaktere ${}_{L_P}\chi_3(k, l)$ für $k = 1, \dots, q^3 - 2$, $l = 0, 1, \dots, q - 2$ die Norm 1 besitzen. Insbesondere ist ${}_{L_P}\chi_3(k, l)$ für die angegebenen Werte von k und l somit bis auf das Vorzeichen ein irreduzibler Charakter von L_P . Da ${}_{L_P}\chi_3(k, l)(1)$ eine positive ganze Zahl ist, sind die ${}_{L_P}\chi_3(k, l)$ für die angegebenen Werte von k und l tatsächlich irreduzible Charaktere von L_P . Die Orthogonalitätsrelationen für Deligne–Lusztig–Charaktere zeigen weiter, dass wir auf diese Weise genau $\frac{1}{2}(q^3 - 2)(q - 1)$ verschiedene irreduzible Charaktere von L_P konstruiert haben.

Mit analogen Argumenten zeigt man, dass die ${}_{L_P}\chi_4(k)$ für $k = 0, 1, \dots, q^4 - q^3 + q - 2$, $k \neq (q^3 + 1)k'$, $k' = 0, 1, \dots, q - 2$, irreduzible Charaktere von L_P sind. Unter diesen ${}_{L_P}\chi_4(k)$ kommen genau $\frac{1}{2}q^3(q - 1)$ verschiedene vor. Damit haben wir bereits

$$\frac{1}{2}(q^3 - 2)(q - 1) + \frac{1}{2}q^3(q - 1) = q^4 - q^3 - q + 1$$

irreduzible Charaktere von L_P konstruiert. Aus Satz 3.3.3 wissen wir, dass L_P genau $q^4 - q^3 + q - 1$ Konjugiertenklassen besitzt. Somit fehlen uns noch $2(q - 1)$ irreduzible Charaktere von L_P .

Mittels der Orthogonalitätsrelationen für Deligne–Lusztig–Charaktere sieht man, dass die Deligne–Lusztig–Charaktere $R_{\mathbf{T}_0}^{\mathbf{L}_P} \theta_{kl}$ und $R_{\mathbf{T}_2}^{\mathbf{L}_P} \theta_k$ für die übrigen Werte von k und l jeweils die Norm 2 haben. Diese Norm-2–Charaktere könnte man nun mit Hilfe der Deligne–Lusztig–Theorie in ihre irreduziblen Bestandteile zerlegen. Wir wollen hier jedoch ein ad-hoc–Argument benutzen, um die noch fehlenden $2(q - 1)$ irreduziblen Charaktere von L_P zu bestimmen. Wir setzen

$$K := \{h(1, t, 1, 1) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q-1} = 1\} \text{ und} \quad (4.4)$$

$$L'_P := \langle X_\alpha, n_\alpha, h(t, 1, t^q, t^{q^2}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q^3-1} = 1 \rangle. \quad (4.5)$$

Mit Hilfe der Relationen aus Abschnitt 2.3 rechnet man nach, dass L_P das semidirekte Produkt $K \rtimes L'_P$ ist. Die Bezeichnung L'_P ist kein Zufall: Wir werden später sehen, dass

L'_P die Kommutatorgruppe von L_P ist. Wir können also die zyklische Gruppe K der Ordnung $q-1$ als Faktorgruppe von L_P interpretieren. Wir betrachten die $q-1$ irreduziblen Charaktere ${}_{L_P}\bar{\chi}_1(k)$ von K , $k = 0, 1, \dots, q-2$, die durch ${}_{L_P}\bar{\chi}_1(k)(h(1, \tilde{\zeta}_1^i, 1, 1)) := \zeta_1^{ik}$ definiert sind. Inflation dieser $q-1$ Charaktere von K auf L_P liefert $q-1$ lineare Charaktere ${}_{L_P}\chi_1(k)$, $k = 0, 1, \dots, q-2$. Da L_P eine endliche Gruppe vom Lie-Typ ist, können wir einen weiteren irreduziblen Charakter von L_P sofort hinschreiben, nämlich den Steinberg-Charakter $\mathbf{St}_{L_P}$. Dies liefert die weiteren irreduziblen Charaktere ${}_{L_P}\chi_2(k) := {}_{L_P}\chi_1(k)\mathbf{St}_{L_P}$ von L_P , $k = 0, 1, \dots, q-2$. Die Werte sind in Tabelle 4.5 angegeben.

	$c_{1,0}(i)$	$c_{1,1}(i)$	$c_{2,0}(i, j)$	$c_{3,0}(i)$
${}_{L_P}\chi_1(k)$	ζ_1^{2ik}	ζ_1^{2ik}	ζ_1^{jk}	ζ_1^{ik}
${}_{L_P}\chi_2(k)$	$q^3\zeta_1^{2ik}$	0	ζ_1^{jk}	$-\zeta_1^{ik}$

Tabelle 4.5: Irreduzible Charaktere von L_P

Die Charakterwerte in Tabelle 4.5 auf den Klassen $c_{1,0}$, $c_{1,1}$ und $c_{2,0}$ ergeben sich aus der Definition von ${}_{L_P}\chi_1(k)$ und den Werten des Steinberg-Charakters. Die Werte in der letzten Spalte von Tabelle 4.5 beweisen wir am Ende dieses Abschnitts. Aus den Charakterwerten von ${}_{L_P}\chi_1(k)$ und ${}_{L_P}\chi_2(k)$ auf den Konjugiertenklassen vom Typ $c_{2,0}$ folgt, dass die Charaktere ${}_{L_P}\chi_1(k)$ und ${}_{L_P}\chi_2(k)$, $k = 0, 1, \dots, q-2$, alle paarweise verschieden sind. Damit haben wir also die noch fehlenden $2(q-1)$ irreduziblen Charaktere von L_P gefunden.

Nun können wir auch die schon oben angedeutete Bemerkung beweisen:

4.3.2 Bemerkung

Die in (4.5) definierte Untergruppe L'_P ist die Kommutatorgruppe von L_P .

Beweis: Da L_P das semidirekte Produkt $L_P = K \rtimes L'_P$ und K zyklisch ist, ist die Kommutatorgruppe von L_P in L'_P enthalten. Da wir schon wissen, dass L_P genau $q-1$ lineare Charaktere besitzt und $|K| = q-1$ gilt, folgt die Behauptung. (In dem Beweis haben wir die Charakterwerte auf den Konjugiertenklassen vom Typ $c_{3,0}$ nicht benutzt.) ■

Wir wollen nun noch die in Tabelle 4.5 angegebenen Charakterwerte von ${}_{L_P}\chi_1(k)$ und ${}_{L_P}\chi_2(k)$ auf den Klassen vom Typ $c_{3,0}$ beweisen. Wir betrachten die $q-1$ verschiedenen Klassenfunktionen ${}_{L_P}\chi_4((q^3+1)k)$, $k = 0, 1, \dots, q-2$. Per Definition ist ${}_{L_P}\chi_4((q^3+1)k)$ bis auf das Vorzeichen ein Deligne-Lusztig-Charakter und somit ein verallgemeinerter Charakter von L_P . Mittels der Orthogonalitätsrelationen für Deligne-Lusztig-Charaktere sieht man, dass ${}_{L_P}\chi_4((q^3+1)k)$ die Norm 2 hat. Also ist ${}_{L_P}\chi_4((q^3+1)k)$ eine

$\mathbb{Z}$ -Linearkombination zweier irreduzibler Charaktere von L_P . Aus Gradgründen folgt daher, dass ${}_{L_P}\chi_4((q^3 + 1)k)$ die Differenz eines irreduziblen Charakters ${}_{L_P}\chi_2(k')$ und eines linearen Charakters ${}_{L_P}\chi_1(k'')$ ist. Aus den Charakterwerten auf den Konjugiertenklassen vom Typ $c_{1,1}$ und $c_{2,0}$ kann man weiter schließen, dass $k' = k'' = k$ oder $k' = k'' = k + \frac{q-1}{2}$ (modulo $q - 1$) ist. Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} {}_{L_P}\chi_2(1) - {}_{L_P}\chi_1(1) &= {}_{L_P}\chi_4(q^3 + 1) \text{ oder} \\ {}_{L_P}\chi_2(1) - {}_{L_P}\chi_1(1) &= {}_{L_P}\chi_4((q^3 + 1)(1 + \frac{q-1}{2})). \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit ${}_{L_P}\chi_m(k)(c_{3,0}(i))$, $m = 1, 2, 4$ den Wert von ${}_{L_P}\chi_m(k)$ auf den Konjugiertenklassen $c_{3,0}(i)$, so gilt also

$${}_{L_P}\chi_2(1)(c_{3,0}(i)) - {}_{L_P}\chi_1(1)(c_{3,0}(i)) = -2\varepsilon\zeta_1^i$$

mit $\varepsilon \in \{1, -1\}$ unabhängig von i . Da $\mathbf{St}_{L_P}$ auf den Konjugiertenklassen vom Typ $c_{3,0}$ den Wert -1 annimmt, gilt

$${}_{L_P}\chi_2(1)(c_{3,0}(i)) = -{}_{L_P}\chi_1(1)(c_{3,0}(i)).$$

Es folgt ${}_{L_P}\chi_1(1)(c_{3,0}(i)) = \varepsilon\zeta_1^i$. Da die linearen Charaktere von L_P eine zyklische Gruppe bilden und ${}_{L_P}\chi_1(1)$ ein Erzeuger dieser Gruppe ist, gilt ferner: ${}_{L_P}\chi_1(k)(c_{3,0}(i)) = \varepsilon\zeta_1^{ik}$ für $k = 0, \dots, q-2$ (mit ε unabhängig von i und k). Weil ${}_{L_P}\chi_1(0)$ der triviale Charakter ist, folgt nun $\varepsilon = 1$. Nach Definition ist ${}_{L_P}\chi_2(k) := {}_{L_P}\chi_1(k)\mathbf{St}_{L_P}$, woraus auch die Aussagen über die Charakterwerte von ${}_{L_P}\chi_2(k)$ folgen. Damit sind die Charakterwerte in der letzten Spalte von Tabelle 4.5 bewiesen. Wir haben gezeigt:

4.3.3 Satz

Die Standard-Levi-Untergruppe L_P besitzt genau $q^4 - q^3 + q - 1$ irreduzible Charaktere. Die Charaktertafel von L_P ist durch die Tabellen A.36 und A.37 im Anhang gegeben.

Beweis: Siehe den vorangegangenen Abschnitt. ■

4.4 Die Charaktertafel von L_Q

Die Charaktertafel der Standard-Levi-Untergruppe L_Q lässt sich mit den gleichen Methoden wie die Charaktertafel von L_P bestimmen. Da die Rechnungen völlig analog verlaufen, verzichten wir auf eine Ausführung der Details. Die Charaktertafel ist durch die Tabellen A.38 und A.39 im Anhang gegeben. ${}_{L_Q}\chi_2(0)$ ist der Steinberg-Charakter von L_Q .

4.5 Charaktere der Boreluntergruppe B

In diesem Abschnitt rechnen wir explizit einige Charaktere der Boreluntergruppe $B = \mathbf{B}^F$ aus (wieder unter der Voraussetzung, dass q ungerade ist). Wir werden diese Charaktere in Abschnitt 4.10 bei der Berechnung der Charaktertafel der maximalen parabolischen Untergruppe P benutzen. Zum Induzieren von Charakteren zwischen generischen Charaktertafeln benötigt man im Allgemeinen eine Parametrisierung der Konjugiertenklassen sowie eine Beschreibung der Fusionsabbildung. Das Ausrechnen einer solchen Parametrisierung und der Fusionsabbildung ist meist relativ aufwendig. Deutlich einfacher ist hingegen das Induzieren von linearen Charakteren. Hierbei kann man sich allein auf die Induktionsformel (4.1) stützen. Da B eine M -Gruppe ist, können alle irreduziblen Charaktere von B durch Induzieren von linearen Charakteren gewonnen werden. Auf diese Weise werden wir nun einige Charaktere von B explizit bestimmen. Die Ergebnisse sind in den Tabellen A.40 und A.41 im Anhang aufgelistet.

Zuvor legen wir noch einige Notationen fest. Zur Beschreibung von Elementen aus $\mathbb{F}^\times$ und von komplexen generischen Einheitswurzeln benutzen wir die Bezeichnungen aus den Tabellen 3.1 sowie 4.3.

Es sei $\phi : \mathbb{F}_{q^3} \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ein beliebiger linearer Charakter der additiven Gruppe von $\mathbb{F}_{q^3}$, der nichttrivial auf $\mathbb{F}_q$ einschränkt. Zur Abkürzung setzen wir $\tau := \tilde{\zeta}_3$ und $\pi := \tilde{\zeta}_1 = \tau^{q^2+q+1}$ mit $\tilde{\zeta}_3$ und $\tilde{\zeta}_1$ wie in Tabelle 3.1. Dann ist τ ein Erzeuger der multiplikativen Gruppe von $\mathbb{F}_{q^3}$ und π ein Erzeuger der multiplikativen Gruppe von $\mathbb{F}_q$. Für $t_1, t_2 \in \mathbb{F}$ mit $t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1$ schreiben wir wie in Abschnitt 2.3 statt $h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})$ auch kurz $h(t_1, t_2)$. Wir definieren

$$T := \mathbf{T}^F = \{h(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{F}, t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1\}.$$

Wir beschreiben nun, wie sich die Charaktere in Tabelle A.41 im Einzelnen konstruieren lassen.

${}_{B\chi_1}(k)$:

Es ist $C_T(X_\beta) = \{h(t^2, t^{q^2+q+1}) \mid t \in \mathbb{F}_{q^3}^\times\}$. Für $k = 0, \dots, q^3 - 2$ ist daher

$$\varphi_k : h(\tau^{2i}, \pi^i) x_\alpha(d_1) x_\beta(d_2) x_{\alpha+\beta}(d_3) x_{2\alpha+\beta}(d_4) x_{3\alpha+\beta}(d_5) x_{3\alpha+2\beta}(d_6) \mapsto \zeta_3^{ik} \phi(d_2)$$

ein linearer Charakter von $H := C_T(X_\beta)U$. Wir berechnen den nach B induzierten Charakter ${}_{B\chi_1}(k) := \varphi_k^B$. Eine Transversale für die Rechtsnebenklassen von H in B ist

$$\{h_{i',j'} := h(\tau^{i'}, \pi^{j'}) \mid i' = 0, 1; j' = 1, \dots, \frac{q-1}{2}\}.$$

Es sei $b \in B$. Für jeden Nebenklassenvertreter $h_{i',j'}$ sei $h_{i',j'}b = b_{i',j'}h_{b(i'),b(j')}$ mit $b_{i',j'} \in H$. Dann ist nach der Induktionsformel (4.1)

$${}_B\chi_1(k)(b) = \varphi_k^B(b) = \sum_{\substack{i',j' \\ b(i')=i', b(j')=j'}} \varphi_k(b_{i',j'}).$$

Damit lassen sich die Werte von ${}_B\chi_1(k)$ berechnen. Um etliche Rechnungen zu sparen, halten wir noch fest: $X_{\alpha+\beta}X_{2\alpha+\beta}X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ ist ein Normalteiler von B und

$$X_{\alpha+\beta}X_{2\alpha+\beta}X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta} \subseteq \ker(\varphi_k). \quad (4.6)$$

Es genügt somit, die Charakterwerte ${}_B\chi_1(k)(b)$ für Elemente b der Form $b = hx_\alpha(d_1)x_\beta(d_2)$ mit $h \in T$, $d_1 \in \mathbb{F}_{q^3}$ und $d_2 \in \mathbb{F}_q$ zu berechnen.

Es sei zunächst $b = x_\alpha(d_1)x_\beta(d_2)$. Dann ist $h_{i',j'}b = x_\alpha(\dots)x_\beta(\pi^{2j'-i'}d_2)h_{i',j'}$, also

$${}_B\chi_1(k)(b) = \sum_{i',j'} \phi(\pi^{2j'-i'}d_2) = \sum_{m=1}^{q-1} \phi(\pi^m d_2) = \begin{cases} q-1 & \text{falls } d_2 = 0 \\ -1 & \text{falls } d_2 \neq 0 \end{cases}.$$

Unter Beachtung von (4.6) kennen wir damit die Werte von ${}_B\chi_1(k)$ auf allen unipotenten Konjugiertenklassen von B . Die einzigen halbeinfachen Konjugiertenklassen von B , die nichtleeren Durchschnitt mit H haben, sind die halbeinfachen Klassen von B der Typen h_1, h_4, h_5 und h_9 . Es sei nun $b = h(1, -1)x_\beta(d)$. Dann ist $h_{i',j'}b = h(1, -1)x_\beta(\pi^{2j'-i'}d)h_{i',j'}$, also

$${}_B\chi_1(k)(b) = (-1)^k \sum_{i',j'} \phi(\pi^{2j'-i'}d) = (-1)^k \sum_{m=1}^{q-1} \phi(\pi^m) = \begin{cases} (-1)^k(q-1) & \text{falls } d = 0 \\ -(-1)^k & \text{falls } d \neq 0 \end{cases}.$$

Unter Beachtung von (4.6) kennen wir damit jetzt auch die Werte von ${}_B\chi_1(k)$ auf allen Konjugiertenklassen von B der Typen $c_{4,j}$.

Wir betrachten nun die Werte von ${}_B\chi_1(k)$ auf den Konjugiertenklassen von B vom Typ $c_{5,j}$. Es sei $b = h(\tilde{\varphi}_3^i, 1)x_\beta(d)$. Dann ist $h_{i',j'}b = h(\tilde{\varphi}_3^i, 1)x_\beta(\pi^{2j'-i'}d)h_{i',j'}$, also

$${}_B\chi_1(k)(b) = \varphi_3^{-\frac{q^2+q}{2}ik} \sum_{i',j'} \phi(\pi^{2j'-i'}d) = \begin{cases} \varphi_3^{-\frac{q^2+q}{2}ik}(q-1) & \text{falls } d = 0 \\ -\varphi_3^{-\frac{q^2+q}{2}ik} & \text{falls } d \neq 0 \end{cases}.$$

Unter Beachtung von (4.6) kennen wir damit jetzt auch die Werte von ${}_B\chi_1(k)$ auf allen Konjugiertenklassen von B der Typen $c_{5,j}$.

Wir betrachten nun die Werte von ${}_B\chi_1(k)$ auf den Konjugiertenklassen von B vom Typ $c_{9,j}$. Es sei $b = h(\tilde{\zeta}_3^{2i}, \tilde{\zeta}_1^i)x_\beta(d)$. Dann ist $h_{i',j'}b = h(\tilde{\zeta}_3^{2i}, \tilde{\zeta}_1^i)x_\beta(\pi^{2j'-i'}d)h_{i',j'}$, also

$${}_B\chi_1(k)(b) = \zeta_3^{ik} \sum_{i',j'} \phi(\pi^{2j'-i'}d) = \begin{cases} \zeta_3^{ik}(q-1) & \text{falls } d = 0 \\ -\zeta_3^{ik} & \text{falls } d \neq 0 \end{cases}.$$

Unter Beachtung von (4.6) kennen wir damit jetzt auch die Werte von ${}_{B\chi_1}(k)$ auf allen Konjugiertenklassen von B der Typen $c_{9,j}$.

Auf allen anderen Konjugiertenklassen von B haben die ${}_{B\chi_1}(k)$, $k = 0, 1, \dots, q^3 - 2$ den Wert 0. Damit haben wir alle Charakterwerte von ${}_{B\chi_1}(k)$, $k = 0, 1, \dots, q^3 - 2$ bestimmt.

${}_{B\chi_2}$:

Wir betrachten den linearen Charakter

$$\varphi : x_\alpha(d_1)x_\beta(d_2)x_{\alpha+\beta}(d_3)x_{2\alpha+\beta}(d_4)x_{3\alpha+\beta}(d_5)x_{3\alpha+2\beta}(d_6) \mapsto \phi(d_1 + d_2)$$

von $U = X_\alpha X_\beta X_{\alpha+\beta} X_{2\alpha+\beta} X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}$. Wir berechnen den nach B induzierten Charakter ${}_{B\chi_2} := \varphi^B$. Eine Transversale für die Rechtsnebenklassen von U in B ist

$$\{h_{i',j'} := h(\tau^{i'}, \pi^{j'}) \mid i' = 1, \dots, q^3 - 1; j' = 1, \dots, q - 1\}.$$

Da U ein Normalteiler von B ist, verschwindet ${}_{B\chi_2}$ auf allen nicht unipotenten Elementen von B . Wir müssen also nur die Werte von ${}_{B\chi_2}$ auf den unipotenten Elementen bestimmen. Wegen $X_{\alpha+\beta}X_{2\alpha+\beta}X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta} \subseteq \ker(\varphi)$ genügt es auch hier, die Charakterwerte ${}_{B\chi_2}(b)$ für Elemente b der Form $b = x_\alpha(d_1)x_\beta(d_2)$ mit $d_1 \in \mathbb{F}_{q^3}$ und $d_2 \in \mathbb{F}_q$ zu berechnen. Es sei $b = x_\alpha(d_1)x_\beta(d_2)$. Dann ist $h_{i',j'}b = x_\alpha(\tau^{2i'}\pi^{-j'}d_1)x_\beta(\pi^{-i'}\pi^{2j'}d_2)h_{i',j'}$, also

$${}_{B\chi_2}(b) = \sum_{i',j'} \phi(\tau^{2i'}\pi^{-j'}d_1 + \pi^{-i'}\pi^{2j'}d_2) = \begin{cases} (q^3 - 1)(q - 1) & \text{falls } d_1 = d_2 = 0, \\ -(q - 1) & \text{falls } d_1 = 1, d_2 = 0, \\ -(q^3 - 1) & \text{falls } d_1 = 0, d_2 = 1, \\ 1 & \text{falls } d_1 = d_2 = 1. \end{cases}$$

Damit kennen wir nun alle Charakterwerte von ${}_{B\chi_2}$.

${}_{B\chi_3}(k)$:

Es ist $C_T(X_{\alpha+\beta}) = \{h(t, t) \mid t \in \mathbb{F}_q^\times\}$. Für $k = 0, \dots, q - 2$ ist daher

$$\varphi_k : h(\pi^i, \pi^i)x_\alpha(d_1)x_{\alpha+\beta}(d_2)x_{2\alpha+\beta}(d_3)x_{3\alpha+\beta}(d_4)x_{3\alpha+2\beta}(d_5) \mapsto \zeta_1^{ik}\phi(d_2)$$

ein linearer Charakter von $H := C_T(X_{\alpha+\beta})X_\alpha X_{\alpha+\beta}X_{2\alpha+\beta}X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$. Wir berechnen den nach B induzierten Charakter ${}_{B\chi_3}(k) := \varphi_k^B$. Eine Transversale für die Rechtsnebenklassen von H in B ist

$$\{h_{i',s} := h(\tau^{i'}, 1)x_\beta(s) \mid i' = 1, \dots, q^3 - 1, s \in \mathbb{F}_q\}.$$

Wir halten fest: $X_{2\alpha+\beta}X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ ist ein Normalteiler von B und

$$X_{2\alpha+\beta}X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta} \subseteq \ker(\varphi_k). \quad (4.7)$$

Es genügt somit, die Charakterwerte ${}_{B\chi_3}(k)(b)$ für Elemente b der Form

$$b = hx_\alpha(d_1)x_\beta(d_2)x_{\alpha+\beta}(d_3)$$

mit $h \in T$, $d_1, d_3 \in \mathbb{F}_{q^3}$ und $d_2 \in \mathbb{F}_q$ zu berechnen. Wir beginnen wieder mit den Werten auf den unipotenten Elementen. Es sei $b = x_\alpha(d_1)x_\beta(d_2)x_{\alpha+\beta}(d_3)$. Dann ist $h_{i',s}b = x_\alpha(\dots)x_{\alpha+\beta}(\tau^{(-q^2-q+1)i'}(d_3 - sd_1)) \cdot \dots \cdot h_{i',d_2+s}$.

Es sei zunächst $d_2 = 1$. Dann ist $h_{i',s}b = \dots \cdot h_{i',1+s}$, also bleibt keine Nebenklasse fest, d.h.

$${}_{B\chi_3}(k)(b) = 0.$$

Es sei nun $d_1 = 1$ und $d_2 = 0$. Dann hat man

$${}_{B\chi_3}(k)(b) = \sum_{i',s} \phi(\tau^{(-q^2-q+1)i'}(d_3 - s)) = \begin{cases} q(q^2 - 1) & \text{falls } d_3 = 0 \\ -q & \text{falls } d_3^q \neq d_3 \end{cases}.$$

Es sei nun $d_1 = d_2 = 0$. Dann hat man

$${}_{B\chi_3}(k)(b) = \sum_{i',s} \phi(\tau^{(-q^2-q+1)i'}d_3) = \begin{cases} q(q^3 - 1) & \text{falls } d_3 = 0 \\ -q & \text{falls } d_3 \neq 0 \end{cases}.$$

Unter Beachtung von (4.7) kennen wir damit die Werte von ${}_{B\chi_3}(k)$ auf allen unipotenten Konjugiertenklassen von B . Die einzigen halbeinfachen Konjugiertenklassen von B , die nichtleeren Durchschnitt mit H haben, sind die halbeinfachen Klassen von B der Typen h_1 , h_3 , und h_7 . Es nun $b = h(-1, -1)x_{\alpha+\beta}(d)$. Dann ist

$$h_{i',s}b = x_\alpha(\dots)x_{\alpha+\beta}(\tau^{(-q^2-q+1)i'}d) \cdot \dots \cdot h_{i',-s},$$

also

$${}_{B\chi_3}(k)(b) = (-1)^k \sum_{i'} \phi(\tau^{(-q^2-q+1)i'}d) = \begin{cases} (-1)^k(q^3 - 1) & \text{falls } d = 0 \\ -(-1)^k & \text{falls } d \neq 0 \end{cases}.$$

Wir betrachten nun die Werte von ${}_{B\chi_3}(k)$ auf den Konjugiertenklassen von B vom Typ $c_{7,j}$. Es sei $b = h(\tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_1^i)x_{\alpha+\beta}(d)$ mit $i \in \{0, \dots, q-2\}$, $i \neq 0, \frac{q-1}{2}$. Dann ist

$$h_{i',s}b = x_\alpha(\dots)x_{\alpha+\beta}(\tau^{(-q^2-q+1)i'}d) \cdot \dots \cdot h_{i',\tilde{\zeta}_1^i s},$$

also

$${}_{B\chi_3}(k)(b) = \zeta_1^{ik} \sum_{i'} \phi(\tau^{(-q^2-q+1)i'}d) = \begin{cases} \zeta_1^{ik}(q^3 - 1) & \text{falls } d = 0 \\ -\zeta_1^{ik} & \text{falls } d \neq 0 \end{cases}.$$

Auf allen anderen Konjugiertenklassen von B haben die ${}_{B\chi_3}(k)$, $k = 0, 1, \dots, q-2$ den Wert 0. Damit haben wir alle Charakterwerte von ${}_{B\chi_3}(k)$, $k = 0, 1, \dots, q-2$ bestimmt.

${}_{B\chi_4}$:

Durch

$$\varphi : x_\beta(d_1)x_{\alpha+\beta}(d_2)x_{2\alpha+\beta}(d_3)x_{3\alpha+\beta}(d_4)x_{3\alpha+2\beta}(d_5) \mapsto \phi(d_2)$$

wird ein linearer Charakter von U_P definiert. Wir berechnen den nach B induzierten Charakter ${}_{B\chi_4} := \varphi^B$. Eine Transversale für die Rechtsnebenklassen von H in B ist

$$\{h_{i',j',s} := h(\tau^{i'}, \pi^{j'})x_\alpha(s) \mid i' = 1, \dots, q^3 - 1, j' = 1, \dots, q - 1, s \in \mathbb{F}_{q^3}\}.$$

Wir halten fest: $X_{2\alpha+\beta}X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ ist ein Normalteiler von B und

$$X_{2\alpha+\beta}X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta} \subseteq \ker(\varphi). \quad (4.8)$$

Es genügt somit, die Charakterwerte ${}_{B\chi_4}(b)$ für Elemente b der Form

$$b = hx_\alpha(d_1)x_\beta(d_2)x_{\alpha+\beta}(d_3)$$

mit $h \in T$, $d_1, d_3 \in \mathbb{F}_{q^3}$ und $d_2 \in \mathbb{F}_q$ zu berechnen. Wir beginnen wieder mit den Werten auf den unipotenten Elementen. Es sei $b = x_\alpha(d_1)x_\beta(d_2)x_{\alpha+\beta}(d_3)$. Dann ist $h_{i',j',s}b = x_\beta(\dots)x_{\alpha+\beta}(\tau^{(-q^2-q+1)i'}\pi^{j'}(d_3 + (s + d_1)d_2)) \cdot \dots \cdot h_{i',d_1+s}$.

Es sei zunächst $d_1 = 1$. Dann ist $h_{i',s}b = \dots \cdot h_{i',1+s}$, also bleibt keine Nebenklasse fest, d.h.

$${}_{B\chi_4}(b) = 0.$$

Es sei nun $d_1 = 0$ und $d_2 = 1$. Dann hat man

$${}_{B\chi_4}(b) = \sum_{i',j',s} \phi(\tau^{(-q^2-q+1)i'}\pi^{j'}(d_3 + s)) = 0.$$

Es sei nun $d_1 = d_2 = 0$. Dann hat man

$${}_{B\chi_4}(b) = \sum_{i',j',s} \phi(\tau^{(-q^2-q+1)i'}\pi^{j'}d_3) = \begin{cases} q^3(q^3 - 1)(q - 1) & \text{falls } d_3 = 0 \\ -q^3(q - 1) & \text{falls } d_3 \neq 0 \end{cases}.$$

Unter Beachtung von (4.8) kennen wir damit die Werte von ${}_{B\chi_4}$ auf allen unipotenten Konjugiertenklassen von B . Da ${}_{B\chi_4}$ durch Induktion vom Normalteiler U_P entsteht, verschwindet ${}_{B\chi_4}$ auf allen anderen Konjugiertenklassen. Damit haben wir alle Charakterwerte von ${}_{B\chi_4}$ berechnet. Man beachte, dass wir in den Berechnungen sämtlicher Charakterwerte von ${}_{B\chi_4}$ nur benutzt haben, dass ϕ nichttrivial ist (siehe hierzu auch Bemerkung 4.5.1 am Ende dieses Abschnitts).

${}_{B\chi_5}(k)$:

Es ist $C_T := C_T(X_\beta) \cap C_T(X_{3\alpha+\beta}) = \{h(t, 1) \mid t \in \mathbb{F}_{q^3}^\times, t^{q^2+q+1} = 1\}$. Für $k = 0, \dots, q^2 + q$ ist daher

$$\varphi_k : h(\tau^{(q-1)i}, 1)x_\beta(d_1)x_{\alpha+\beta}(d_2)x_{2\alpha+\beta}(d_3)x_{3\alpha+\beta}(d_4)x_{3\alpha+2\beta}(d_5) \mapsto \phi_3^{ik}\phi(d_1 + d_4)$$

ein linearer Charakter von $H := C_T X_\beta X_{\alpha+\beta} X_{2\alpha+\beta} X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}$. Wir berechnen den nach B induzierten Charakter ${}_B\chi_5(k) := \varphi_k^B$. Eine Transversale für die Rechtsnebenklassen von H in B ist

$$\{h_{i',j',s} := h(\tau^{i'}, \pi^{j'})x_\alpha(s) \mid i', j' = 1, \dots, q-1, s \in \mathbb{F}_{q^3}\}.$$

Wir halten fest: $X_{3\alpha+2\beta}$ ist ein Normalteiler von B und

$$X_{3\alpha+2\beta} \subseteq \ker(\varphi_k). \quad (4.9)$$

Es genügt somit, die Charakterwerte ${}_B\chi_5(k)(b)$ für Elemente b der Form

$$b = hx_\alpha(d_1)x_\beta(d_2)x_{\alpha+\beta}(d_3)x_{2\alpha+\beta}(d_4)x_{3\alpha+\beta}(d_5)$$

mit $h \in T$, $d_1, d_3, d_4 \in \mathbb{F}_{q^3}$ und $d_2, d_5 \in \mathbb{F}_q$ zu berechnen. Die Bestimmung von ${}_B\chi_5(k) = \varphi_k^B$ ist komplizierter als bei den Charakteren ${}_B\chi_1$ bis ${}_B\chi_4$. Wir fassen $\mathbb{F}_q$ als Teilkörper von $\mathbb{F}_{q^3}$ auf und erinnern an die *Spur* von $\mathbb{F}_{q^3}$ über $\mathbb{F}_q$:

$$\begin{aligned} \text{Tr} : \mathbb{F}_{q^3} &\rightarrow \mathbb{F}_q \\ u &\mapsto u^{q^2} + u^q + u. \end{aligned}$$

Es seien $\lambda \in \mathbb{F}_{q^3}$, $\nu \in \mathbb{F}_q \subseteq \mathbb{F}_{q^3}$ und

$$\begin{aligned} f &:= X^{q+1} + X^{q^2+q} + X^{q^2+1} + \nu \in \mathbb{F}_q[X], \\ g &:= X^{q^2+q+1} - (\lambda^q X + \lambda^{q^2} X^q + \lambda X^{q^2}) - \nu \in \mathbb{F}_{q^3}[X]. \end{aligned}$$

Wir definieren (vergleiche Geck [19], Seite 93):

$$\begin{aligned} L(\nu) &:= |\{x \in \mathbb{F}_{q^3} \mid f(x) = 0\}|, \\ M(\lambda, \nu) &:= |\{x \in \mathbb{F}_{q^3} \mid g(x) = 0\}|. \end{aligned}$$

Für $L(\nu)$ und $M(\lambda, \nu)$ beweist Geck (siehe Geck [19], Seite 97f):

$$L(\nu) = \begin{cases} q^2 + q & \text{falls } \nu \neq 0 \text{ ein Quadrat ist,} \\ q^2 - q & \text{falls } \nu \neq 0 \text{ ein Nicht-Quadrat ist,} \\ q^2 & \text{falls } \nu = 0 \text{ ist} \end{cases}$$

und

$$M(\lambda, \nu) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \lambda = \nu = 0, \\ q^2 + 1 & \text{falls } x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(\lambda)x_{3\alpha+\beta}(\nu) \text{ in } c_{1,2}^G \text{ fusioniert,} \\ q^2 + q + 1 & \text{falls } x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(\lambda)x_{3\alpha+\beta}(\nu) \text{ in } c_{1,3}^G \text{ fusioniert,} \\ q^2 - q + 1 & \text{falls } x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(\lambda)x_{3\alpha+\beta}(\nu) \text{ in } c_{1,4}^G \text{ fusioniert.} \end{cases}$$

Wir beginnen nun mit der Bestimmung der Charakterwerte auf den unipotenten Elementen. Es sei $b = x_\alpha(d_1)x_\beta(d_2)x_{\alpha+\beta}(d_3)x_{2\alpha+\beta}(d_4)x_{3\alpha+\beta}(d_5)$.

Es sei zunächst $d_1 = 1$. Dann ist $h_{i',j',s}b = \dots \cdot h_{i',j',1+s}$, also bleibt keine Nebenklasse fest, d.h.

$$B\chi_5(k)(b) = 0.$$

Es sei nun $d_1 = d_3 = 0$ und $d_2 = 1$. Dann hat man

$$h_{i',j',s}b = x_\beta(\pi^{2j'-i'}) \cdot \dots \cdot x_{3\alpha+\beta}(\pi^{i'-j'}(d_5 - \text{Tr}(sd_4^q) + s^{q^2+q+1})) \cdot \dots \cdot h_{i',j',s}.$$

Also

$$\begin{aligned} B\chi_5(k)(b) &= \sum_{i',j',s} \phi(\pi^{2j'-i'} + \pi^{i'-j'}(d_5 - \text{Tr}(sd_4^q) + s^{q^2+q+1})) \\ &= \sum_{i',j',s} \phi(\pi^{j'-i'} + \pi^{i'}(d_5 - \text{Tr}(sd_4^q) + s^{q^2+q+1})). \end{aligned}$$

Ist $d_5 - \text{Tr}(sd_4^q) + s^{q^2+q+1} \neq 0$, so hat man

$$\sum_{i',j'} \phi(\pi^{j'-i'} + \pi^{i'}(d_5 - \text{Tr}(sd_4^q) + s^{q^2+q+1})) = \left(\sum_{i'} \phi(\pi^{i'}) \right) \cdot \left(\sum_{j'} \phi(\pi^{j'}) \right) = (-1)^2 = 1.$$

Für $d_5 - \text{Tr}(sd_4^q) + s^{q^2+q+1} = 0$ ergibt sich

$$\sum_{i',j'} \phi(\pi^{j'-i'} + \pi^{i'}(d_5 - \text{Tr}(sd_4^q) + s^{q^2+q+1})) = \sum_{i',j'} \phi(\pi^{j'-i'}) = -(q-1).$$

Also gilt:

$$B\chi_5(k)(b) = q^3 - M(d_4, d_5) - (q-1)M(d_4, d_5) = q^3 - qM(d_4, d_5).$$

Hieraus ergeben sich die Werte von $B\chi_5(k)$ auf den unipotenten Konjugiertenklassen $c_{1,3}$, $c_{1,6}$, $c_{1,8}$, $c_{1,9}$, $c_{1,12}$, $c_{1,13}$ und $c_{1,16}$.

Als nächstes sei $d_1 = d_2 = d_4 = 0$ und $d_3 = 1$. Dann hat man

$$h_{i',j',s}b = x_{\alpha+\beta}(\dots) \cdot \dots \cdot x_{3\alpha+\beta}(\pi^{i'-j'}(d_5 + \text{Tr}(s^{q^2+q}))) \cdot \dots \cdot h_{i',j',s}.$$

Also

$$B\chi_5(k)(b) = \sum_{i',j',s} \phi(\pi^{i'-j'}(d_5 + \text{Tr}(s^{q^2+q}))),$$

somit

$$B\chi_5(k)(b) = -(q-1)(q^3 - L(d_5)) + (q-1)^2 L(d_5) = q(q-1)(L(d_5) - q^2).$$

Hieraus folgen die Werte von ${}_B\chi_5(k)$ auf den unipotenten Konjugiertenklassen $c_{1,5}$, $c_{1,10}$ und $c_{1,14}$.

Für $d_1 = d_2 = d_3 = d_5 = 0$ und $d_4 = 1$ ergibt sich

$$h_{i',j',s}b = x_{\alpha+\beta}(\dots) \cdot \dots \cdot x_{3\alpha+\beta}(\pi^{i'-j'}(-\text{Tr}(s))) \cdot \dots \cdot h_{i',j',s}$$

und daher

$${}_B\chi_5(k)(b) = \sum_{i',j',s} \phi(\pi^{i'-j'}(-\text{Tr}(s))) = 0.$$

Für $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 0$ und $d_5 = 1$ ergibt sich

$$h_{i',j',s}b = x_{\alpha+\beta}(\dots) \cdot \dots \cdot x_{3\alpha+\beta}(\pi^{i'-j'}) \cdot \dots \cdot h_{i',j',s}$$

und daher

$${}_B\chi_5(k)(b) = \sum_{i',j',s} \phi(\pi^{i'-j'}) = -q^3(q-1).$$

Unter Beachtung von (4.9) kennen wir damit die Werte von ${}_B\chi_5(k)$ auf allen unipotenten Konjugiertenklassen von B . Die einzigen halbeinfachen Konjugiertenklassen von B , die nichtleeren Durchschnitt mit H haben, sind die halbeinfachen Klassen von B der Typen h_1 und h_5 . Es sei $b = h(\tilde{\varphi}_1^i, 1)x_\beta(d_1)x_{3\alpha+\beta}(d_2)$ mit $i \in \{1, \dots, q^2 + q\}$. Dann ist

$$h_{i',j',s}b = h(\tilde{\varphi}_1^i, 1)x_\beta(\pi^{-i'}\pi^{2j'}d_1) \cdot \dots \cdot x_{3\alpha+\beta}(\pi^{i'}\pi^{-j'}(d_2 + (\tilde{\varphi}_3^{-2i}s)^{q^2+q+1}d_1)) \cdot \dots \cdot h_{i',\tilde{\zeta}^{-2i}s},$$

also

$${}_B\chi_5(k)(b) = \varphi_3^{ik} \sum_{i',j'} \phi(\pi^{-i'}\pi^{2j'}d_1 + \pi^{i'}\pi^{-j'}d_2) = \begin{cases} \varphi_3^{ik}(q-1)^2 & \text{falls } d_1 = d_2 = 0 \\ \varphi_3^{ik} & \text{falls } d_1 = d_2 = 1 \\ -\varphi_3^{ik}(q-1) & \text{falls } d_1 \text{ oder } d_2 = 0. \end{cases}$$

Damit haben wir alle Charakterwerte von ${}_B\chi_5(k)$, $k = 0, 1, \dots, q^2 + q$ bestimmt.

${}_B\chi_6(k)$:

Es ist $C_T(X_{3\alpha+2\beta}) = \{h(t, 1) \mid t \in \mathbb{F}_{q^3}^\times\}$. Für $k = 0, \dots, q^3 - 2$ ist daher

$$\varphi_k : h(\tau^i, 1)x_\alpha(d_1)x_{2\alpha+\beta}(d_2)x_{3\alpha+\beta}(d_3)x_{3\alpha+2\beta}(d_4) \mapsto \zeta_3^{ik}\phi(d_4)$$

ein linearer Charakter von $H := C_T(X_{3\alpha+2\beta})X_\alpha X_{2\alpha+\beta}X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$. Für $k = 0, \dots, q^3 - 2$ definieren wir ${}_B\chi_6(k) := \varphi_k^B$. Eine Transversale für die Rechtsnebenklassen von H in B ist

$$\{h_{j',r,s} := h(1, \pi^{j'})x_\beta(r)a_{\alpha+\beta}(s) \mid j' = 1, \dots, q-1, r \in \mathbb{F}_q, s \in \mathbb{F}_{q^3}\}.$$

Der Spezialfall φ_0^B ist schon in Geck [19] auf den Seiten 95 bis 97 ausgerechnet. Da die Rechnungen für den allgemeinen Fall analog verlaufen, wollen wir hier auf die Details der Rechnung verzichten.

4.5.1 Bemerkung

An Hand der Tabelle A.41 kann man erkennen, dass die hier konstruierten Charaktere ${}_B\chi_1, \dots, {}_B\chi_6$ nicht von der Wahl des linearen Charakters ϕ der additiven Gruppe von $\mathbb{F}_{q^3}$ abhängen, sofern nur ϕ nichttrivial auf $\mathbb{F}_q$ einschränkt. Bei der Konstruktion von ${}_B\chi_4$ erhält man sogar das gleiche Ergebnis, wenn man statt der nichttrivialen Einschränkung von ϕ auf $\mathbb{F}_q$ nur die Nichttrivialität von ϕ voraussetzt.

4.6 Die Charaktertafel eines unipotenten Radikals

Wir verwenden in diesem Abschnitt die gleichen Bezeichnungen wie in den Kapiteln 2 und 3. Insbesondere sei P die bereits in Abschnitt 3.5 untersuchte maximale parabolische Untergruppe von $G = {}^3D_4(q)$, q ungerade. Bei der Berechnung der Charaktertafel der maximalen parabolischen Untergruppe P stützen wir uns auf die Levi-Zerlegung:

$$P = L_P \ltimes U_P$$

(siehe Satz 3.5.1). Um irreduzible Charaktere von P mittels Clifford-Theorie konstruieren zu können, benötigen wir die irreduziblen Charaktere des unipotenten Radikals U_P . Wir bestimmen daher in diesem Abschnitt die Charaktertafel von U_P . Wir beginnen mit der Berechnung der Konjugiertenklassen von U_P . Zum Rechnen in U_P brauchen wir nur die Kommutatorrelationen aus Tabelle 2.3. Wir stützen uns bei unseren Berechnungen auf eine einfache Beobachtung, die wir in einer Bemerkung zusammenfassen:

4.6.1 Bemerkung

Für das Zentrum $Z(U_P)$ und die Kommutatorgruppe $[U_P, U_P]$ von U_P gilt:

$$Z(U_P) = [U_P, U_P] = X_{3\alpha+2\beta}.$$

Der Faktor $U_P/X_{3\alpha+2\beta}$ ist elementar-abelsch von Ordnung q^8 . Insbesondere ist U_P eine spezielle p -Gruppe.

Beweis: Dies folgt aus den Kommutatorrelationen in Tabelle 2.3. ■

Wir beginnen mit der Bestimmung der Konjugiertenklassen von U_P . Wir erinnern noch einmal daran, dass wir in Abschnitt 2.2 mit $\mathbb{F}_q$ bzw. $\mathbb{F}_{q^3}$ den eindeutig bestimmten Teilkörper von $\mathbb{F}$ mit q bzw. q^3 Elementen bezeichnet haben.

Aus Bemerkung 4.6.1 folgt, dass es in U_P die zentralen Konjugiertenklassen mit Vertretern

$$u_1(d) := x_{3\alpha+2\beta}(d)$$

mit $d \in \mathbb{F}_q$ gibt. Da nach Bemerkung 4.6.1 der Faktor $U_P/X_{3\alpha+2\beta}$ abelsch ist, sind die Elemente

$$u_2(d_1, d_2, d_3, d_4) := x_\beta(d_1)x_{\alpha+\beta}(d_2)x_{2\alpha+\beta}(d_3)x_{3\alpha+\beta}(d_4)$$

mit $(d_1, d_2, d_3, d_4) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_{q^3} \times \mathbb{F}_{q^3} \times \mathbb{F}_q - \{(0, 0, 0, 0)\}$, in U_P paarweise nicht konjugiert. Mittels der Kommutatorrelationen in Tabelle 2.3 bestätigt man:

$$|C_{U_P}(u_2(d_1, d_2, d_3, d_4))| = \frac{|U_P|}{q} = q^8.$$

Summation über die Klassenlängen zeigt, dass wir damit alle Konjugiertenklassen von U_P gefunden haben. Somit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

4.6.2 Satz (Konjugiertenklassen von U_P)

Das unipotente Radikal U_P von P besitzt genau $q^8 + q - 1$ Konjugiertenklassen. Ein vollständiges Vertretersystem mit zugehörigen Zentralisatorordnungen ist durch Tabelle A.42 im Anhang gegeben.

Beweis: Siehe den vorangegangenen Abschnitt. ■

Wir kommen nun zur Bestimmung der irreduziblen Charaktere von U_P . Aus Bemerkung 4.6.1 folgt, dass U_P genau q^8 lineare Charaktere besitzt, die durch

$$\chi_{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4}(x_\beta(d_1)x_{\alpha+\beta}(d_2)x_{2\alpha+\beta}(d_3)x_{3\alpha+\beta}(d_4)x_{3\alpha+2\beta}(d_5)) := \phi_1(d_1)\phi_2(d_2)\phi_3(d_3)\phi_4(d_4)$$

mit $(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4) \in \text{Irr}(\mathbb{F}_q) \times \text{Irr}(\mathbb{F}_{q^3}) \times \text{Irr}(\mathbb{F}_{q^3}) \times \text{Irr}(\mathbb{F}_q)$ gegeben sind. Hierbei sind mit $\text{Irr}(\mathbb{F}_q)$ bzw. $\text{Irr}(\mathbb{F}_{q^3})$ die irreduziblen Charaktere der additiven Gruppen von $\mathbb{F}_q$ bzw. $\mathbb{F}_{q^3}$ gemeint.

Da U_P genau $q^8 + q - 1$ Konjugiertenklassen besitzt, fehlen uns also noch $q - 1$ irreduzible Charaktere von U_P . Die noch fehlenden $q - 1$ irreduziblen Charaktere von U_P gewinnen wir durch Induktion linearer Charaktere von $X_{2\alpha+\beta}X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ nach U_P . Wir bedienen uns dabei der gleichen Vorgehensweise wie bei der Induktion linearer Charaktere in Abschnitt 4.5.

Es sei ϕ ein beliebiger nichttrivialer irreduzibler Charakter der additiven Gruppe von $\mathbb{F}_q$. Mit θ_ϕ bezeichnen wir den linearen Charakter von $X_{2\alpha+\beta}X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$, der durch

$$\theta_\phi(x_{2\alpha+\beta}(c_1)x_{3\alpha+\beta}(c_2)x_{3\alpha+2\beta}(c_3)) := \phi(c_3)$$

definiert ist. Mit Hilfe der Induktionsformel (4.1) können wir dann $\chi_\phi := \theta_\phi \uparrow^{U_P}$ berechnen, wobei wir als Transversale

$$\{x_\beta(s_1)x_{\alpha+\beta}(s_2) \mid s_1 \in \mathbb{F}_q, s_2 \in \mathbb{F}_{q^3}\}$$

wählen. Das Ergebnis findet man in der dritten Zeile von Tabelle A.44 im Anhang. Wie man mit den Angaben aus Tabelle A.42 nachrechnet, haben die Charaktere χ_ϕ alle die

Norm 1. Da sich die χ_ϕ auf den zentralen Klassen unterscheiden (vergleiche Tabelle A.44), sind sie paarweise verschieden, so dass wir damit $q - 1$ irreduzible Charaktere vom Grad q^4 gefunden haben. Somit haben wir alle irreduziblen Charaktere von U_P gefunden. Damit haben wir gezeigt:

4.6.3 Satz

Das unipotente Radikal U_P besitzt genau $q^8 + q - 1$ irreduzible Charaktere. Die Charaktertafel von U_P ist durch die Tabellen A.43 und A.44 im Anhang gegeben.

Beweis: Siehe den vorangegangenen Abschnitt. ■

4.7 Charaktere eines weiteren unipotenten Radikals

Wir verwenden in diesem Abschnitt die gleichen Bezeichnungen wie in den Kapiteln 2 und 3. Insbesondere sei Q die bereits in Abschnitt 3.6 untersuchte maximale parabolische Untergruppe von $G = {}^3D_4(q)$, q ungerade. Zur Berechnung irreduzibler Charaktere von Q werden wir später irreduzible Charaktere des unipotenten Radikals U_Q von Q benötigen.

4.7.1 Bemerkung

Analog zur Berechnung der Charaktertafel des unipotenten Radikals U_P von P könnte man versuchen, die vollständige Charaktertafel von U_Q zu bestimmen. Dies erweist sich jedoch als schwierig. Ein Grund hierfür besteht darin, dass U_Q die Nilpotenzklasse 3 besitzt (während U_P von Nilpotenzklasse 2 ist). Im Gegensatz zu U_P , ist also U_Q keine spezielle p -Gruppe. Die Methoden aus dem vorangegangenen Abschnitt 4.6 zur Berechnung der Charaktertafel von U_P lassen sich also nicht ohne Weiteres auf U_Q übertragen. Besondere Schwierigkeiten bereitet die Berechnung der irreduziblen Charaktere von U_Q , die nicht-trivial auf das Zentrum $Z(U_Q)$ von U_Q einschränken. Da es mir bislang nicht gelungen ist, diese irreduziblen Charaktere zu berechnen, begnügen wir uns in diesem Abschnitt damit, alle anderen irreduziblen Charaktere von U_Q zu bestimmen. Die Faktorgruppe $\bar{U}_Q := U_Q/Z(U_Q)$ ist eine spezielle p -Gruppe, und die Methoden aus dem vorangegangenen Abschnitt 4.6 lassen sich benutzen, um die vollständige Charaktertafel von $\bar{U}_Q$ auszurechnen. Dies wird in diesem Abschnitt durchgeführt. Gleichbedeutend hiermit ist die Bestimmung aller irreduziblen Charaktere von U_Q , die trivial auf $Z(U_Q)$ einschränken.

An den Kommutatorrelationen aus Tabelle 2.3 erkennt man, dass $X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ das Zentrum von U_Q ist. Wir betrachten die Faktorgruppe $\bar{U}_Q := U_Q/X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$. Die Berechnung der Konjugiertenklassen von $\bar{U}_Q$ verläuft analog zur Berechnung der Konjugiertenklassen von U_P . Wir geben daher hier nur die Ergebnisse an.

4.7.2 Satz (Konjugiertenklassen von $\overline{U}_Q$)

Die Faktorgruppe $\overline{U}_Q$ des unipotenten Radikals U_Q besitzt genau $q^6 + q^3 - 1$ Konjugiertenklassen. Ein vollständiges Vertretersystem mit zugehörigen Zentralisatorordnungen ist durch Tabelle A.50 im Anhang gegeben. In Tabelle A.50 ist für Elemente $u \in U_Q$ mit $\bar{u}$ die Restklasse von u modulo $X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ gemeint.

Beweis: Analog zu Satz 4.6.2. ■

Mit den gleichen Methoden wie bei der Bestimmung der Charaktertafel von U_P lässt sich auch die Charaktertafel von $\overline{U}_Q$ ausrechnen. Da die Rechenschritte analog verlaufen, verzichten wir hier auf eine Beschreibung der Details und geben nur die Ergebnisse an:

4.7.3 Satz

Die Faktorgruppe $\overline{U}_Q$ des unipotenten Radikals U_Q besitzt genau $q^6 + q^3 - 1$ irreduzible Charaktere. Die Charaktertafel von $\overline{U}_Q$ ist durch die Tabellen A.51 und A.52 im Anhang gegeben.

Beweis: Analog zu Satz 4.6.3. ■

Häufig werden wir die irreduziblen Charaktere χ_{ϕ_1, ϕ_2} und χ_ϕ von $\overline{U}_Q$ vermöge Inflation mit den entsprechenden Charakteren von U_Q , die $X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ im Kern enthalten, identifizieren. Wir verwenden für diese Charaktere von U_Q dann ebenfalls die Bezeichnungen χ_{ϕ_1, ϕ_2} bzw. χ_ϕ .

4.8 Trägheitsgruppen in P

Die parabolische Untergruppe P operiert auf den irreduziblen Charakteren ihres unipotenten Radikals U_P per Konjugation. Die Stabilisatoren der irreduziblen Charaktere von U_P bezüglich dieser Operation sind die Trägheitsgruppen. Die Clifford-Theorie liefert Beziehungen zwischen den irreduziblen Charakteren von P und gewissen irreduziblen Charakteren der Trägheitsgruppen (für Details hierzu siehe Abschnitt 4.1).

Für uns sind die Trägheitsgruppen in zweierlei Hinsicht von Interesse: Zum einen werden wir sie in diesem Kapitel benötigen, um irreduzible Charaktere von P zu konstruieren. Zum andern werden sie im nächsten Kapitel eine wichtige Rolle bei der Bestimmung der Blockeinteilung der irreduziblen Charaktere von P spielen. Wir wollen daher in diesem Abschnitt die Trägheitsgruppen der irreduziblen Charaktere von U_P in P bis auf Konjugation bestimmen.

Zur Beschreibung der Konjugiertenklassen und irreduziblen Charaktere von U_P benutzen wir weiterhin die Bezeichnungen aus Abschnitt 4.6. Wir setzen auch in diesem

Abschnitt die Primzahlpotenz q als ungerade voraus. Bevor wir das Hauptergebnis dieses Abschnitts formulieren, wollen wir noch einige weitere Notationen einführen. Für einen irreduziblen Charakter ϑ von U_P bezeichne $I_P(\vartheta)$ die Trägheitsgruppe von ϑ in P (vergleiche Abschnitt 4.1). Da U_P auf $\text{Irr}(U_P)$ per Konjugation trivial operiert, gilt $U_P \subseteq I_P(\vartheta)$ für alle $\vartheta \in \text{Irr}(U_P)$. Wir definieren die *Trägheitsfaktorgruppe* $\bar{I}_P(\vartheta)$ von ϑ durch

$$\bar{I}_P(\vartheta) := I_P(\vartheta)/U_P.$$

Auf Grund der Levi-Zerlegung werden wir häufig $\bar{I}_P(\vartheta)$ mit $I_P(\vartheta) \cap L_P$ identifizieren. Für die irreduziblen Charaktere von U_P wählen wir die gleichen Bezeichnungen wie in Tabelle A.44.

Hauptziel dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden Satzes:

4.8.1 Satz (Trägheitsgruppen in P)

Es sei ϕ ein nichttrivialer irreduzibler Charakter der additiven Gruppe von $\mathbb{F}_q$ und ϕ' ein nichttrivialer irreduzibler Charakter der additiven Gruppe von $\mathbb{F}_{q^3}$ mit der Eigenschaft

$$\{r \in \mathbb{F}_{q^3} \mid r^{q^2} + r^q + r = 0\} \subseteq \ker(\phi').$$

Wir definieren $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_5 \in \text{Irr}(U_P)$ durch:

$$\begin{aligned} \psi_0 &:= \chi_{\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}}, \\ \psi_1 &:= \chi_{\phi, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{1}}, \\ \psi_2 &:= \chi_{\mathbf{1}, \phi', \mathbf{1}, \mathbf{1}}, \\ \psi_3 &:= \chi_{\phi, \mathbf{1}, \mathbf{1}, \phi}, \\ \psi_5 &:= \chi_{\phi}. \end{aligned}$$

Dann existiert ein linearer Charakter ψ_4 von U_P , so dass die folgenden Aussagen (a) bis (c) wahr sind:

- (a) $\{\psi_0, \dots, \psi_4, \psi_5\}$ ist ein Vertretersystem der Bahnen von P auf $\text{Irr}(U_P)$,
- (b) die Trägheitsfaktorgruppen $\bar{I}_j := \bar{I}_P(\psi_j)$, $j = 0, 1, \dots, 5$, haben die Ordnungen:

$$\begin{aligned} |\bar{I}_0| &= q^3(q^6 - 1)(q - 1), \\ |\bar{I}_1| &= q^3(q^3 - 1), \\ |\bar{I}_2| &= q^2(q - 1), \\ |\bar{I}_3| &= 2(q^2 + q + 1), \\ |\bar{I}_4| &= 2(q^2 - q + 1), \\ |\bar{I}_5| &= q^3(q^6 - 1). \end{aligned}$$

(c) für die Trägheitsfaktorgruppen gilt:

0. $\bar{I}_0 = L_P$,
1. $\bar{I}_1 = \{h(t^2, t^{q^2+q+1}, t^{2q}, t^{2q^2})x_\alpha(s) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q^3-1} = 1, s \in \mathbb{F}_{q^3}\}$,
2. $\bar{I}_2 = \{h(t, t, t^q, t^{q^2})x_\alpha(s) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q-1} = 1, s \in \mathbb{F}_{q^3}, s^{q^2} + s^q + s = 0\}$,
3. $\bar{I}_3 = \langle n_\alpha h(1, -1, 1, 1), h(t, 1, t^q, t^{q^2}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q^2+q+1} = 1 \rangle$,
4. $\bar{I}_4 = \langle n_4 \rangle \ltimes \{h(t, 1, t^{-q}, t^{q-1}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q^2-q+1} = 1\}$, wobei n_4 eine Involution mit $C_{\bar{I}_4}(n_4) = \langle n_4 \rangle$ und $\{h(t, 1, t^{-q}, t^{q-1}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q^2-q+1} = 1\}$ ein zyklischer Normalteiler der Ordnung $q^2 - q + 1$ von $\bar{I}_4$ ist,
5. $\bar{I}_5 = L'_P$ (zur Definition von L'_P siehe (4.5) in Abschnitt 4.3).

4.8.2 Bemerkung

Eine explizite Angabe von ψ_4 ist schwierig und wird hier nicht vorgenommen.

Beweis (von Satz 4.8.1):

Da U_P auf den Konjugiertenklassen von U_P und den irreduziblen Charakteren von U_P per Konjugation trivial operiert, genügt es zur Bestimmung der Bahnen und Trägheitsgruppen auf Grund der Levi-Zerlegung, die Operation von L_P auf den Konjugiertenklassen und irreduziblen Charakteren von U_P zu betrachten.

Die Bezeichnungen für die Konjugiertenklassen und irreduziblen Charaktere von U_P übernehmen wir aus den Tabellen A.42 bis A.44 im Anhang.

$\bar{I}_5$:

Aus den Relationen in Tabelle 2.2 folgt:

$$h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})^{-1} u_1(d) h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2}) = u_1(t_2^{-1}d),$$

also operiert L_P transitiv auf den $q - 1$ nichttrivialen zentralen Konjugiertenklassen von U_P . Dies sind genau die Konjugiertenklassen, auf denen sich die irreduziblen Charaktere vom Grad q^4 von U_P unterscheiden. Also bilden diese irreduziblen Charaktere von U_P eine Bahn der Länge $q - 1$ unter der Operation von L_P . Damit wissen wir bereits $|\bar{I}_5| = \frac{|L_P|}{q-1} = q^3(q^6 - 1)$. Aus den Relationen in Abschnitt 2.3 ergibt sich $L'_P \subseteq \bar{I}_5$. Aus Ordnungsgründen gilt hier Gleichheit. Damit haben wir bereits die Aussagen über $\bar{I}_5$ bewiesen.

Es sind nun also noch die Aussagen über die Bahnen und Trägheitsgruppen der linearen Charaktere nachzuweisen. Mit Hilfe der Relationen aus Abschnitt 2.3 und den Informationen aus Tabelle A.25 im Anhang rechnet man nach, dass die Operation von L_P auf den Konjugiertenklassen von U_P in genau 6 Bahnen zerfällt. Nach dem Permutationslemma 4.1.1 zerfällt dann auch die Operation von L_P auf $\text{Irr}(U_P)$ in genau 6 Bahnen. Wie wir

bereits gesehen haben, bilden die irreduziblen Charaktere vom Grad q^4 von U_P eine solche Bahn. Demnach teilen sich die linearen Charaktere von U_P in genau 5 Bahnen unter der Operation von L_P auf. Für die im Satz definierten linearen Charaktere $\psi_0, \dots, \psi_3$ wollen wir nun die Trägheitsfaktorgruppen $\bar{I}_j$, $j = 0, \dots, 3$ berechnen.

$\bar{I}_0$:

$\chi_{1,1,1,1}$ ist der triviale Charakter von U_P und ist daher unter ganz L_P invariant.

$\bar{I}_1$:

Es sei zunächst $x = h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})x_\alpha(s)$ mit $t_1, t_2 \in \mathbb{F}$, $t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1$, $s \in \mathbb{F}_{q^3}$. Mittels der Relationen in Abschnitt 2.3 rechnet man nach, dass

$$\psi_1^x(u_2(d_1, d_2, d_3, d_4)) = \psi_1(u_2(d_1, d_2, d_3, d_4))$$

genau dann gilt, wenn

$$\phi(t_1^{-q^2-q-1}t_2^2d_1) = \phi(d_1)$$

ist. Also ist $\psi_1^x = \psi_1$ genau dann, wenn

$$(t_1^{-q^2-q-1}t_2^2 - 1)d_1 \in \ker(\phi)$$

für alle $d_1 \in \mathbb{F}_q$ gilt, wenn also $t_1^{q^2+q+1} = t_2^2$ ist. Dies wiederum ist gleichbedeutend damit, dass $h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})$ von der Form $h(t^2, t^{q^2+q+1}, t^{2q}, t^{2q^2})$ mit $t \in \mathbb{F}$, $t^{q^3-1} = 1$ ist.

Insbesondere ergibt sich hieraus weiter, dass ψ_1 invariant unter X_α ist. Es sei jetzt $x = x_\alpha(r)n_\alpha h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})$ mit $t_1, t_2 \in \mathbb{F}$, $t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1$, $r \in \mathbb{F}_{q^3}$. Mittels der Relationen in Abschnitt 2.3 rechnet man wiederum nach, dass

$$\psi_1^x(u_2(d_1, d_2, d_3, d_4)) = \psi_1(u_2(d_1, d_2, d_3, d_4))$$

genau dann gilt, wenn

$$\phi(-d_4t_1^{q^2+q+1}t_2^{-1}) = \phi(d_1)$$

ist. Also ist $\psi_1^x = \psi_1$ genau dann, wenn

$$d_1 + d_4t_1^{q^2+q+1}t_2^{-1} \in \ker(\phi)$$

für alle $d_1, d_4 \in \mathbb{F}_q$ gilt. Dies ist nicht für alle $d_1, d_4 \in \mathbb{F}_q$ erfüllbar. Damit sind die Aussagen über $\bar{I}_1$ in Satz 4.8.1 bewiesen.

$\bar{I}_2$:

Der Beweis der Aussagen über $\bar{I}_2$ verläuft analog zu dem Beweis für $\bar{I}_1$ (die auftretenden Gleichungssysteme sind allerdings etwas länglicher).

$\bar{I}_3$:

Wir erinnern noch einmal an die *Spurabbildung*

$$\begin{aligned} \text{Tr} : \mathbb{F}_{q^3} &\rightarrow \mathbb{F}_q \\ u &\mapsto u^{q^2} + u^q + u \end{aligned}$$

und daran, dass Tr surjektiv ist (siehe Theorem VI.5.2 in Lang [33]). Es sei zunächst $x = h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})x_\alpha(s)$ mit $t_1, t_2 \in \mathbb{F}$, $t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1$, $s \in \mathbb{F}_{q^3}$. Mittels der Relationen in Abschnitt 2.3 rechnet man nach, dass

$$\psi_3^x(u_2(d_1, d_2, d_3, d_4)) = \psi_3(u_2(d_1, d_2, d_3, d_4))$$

genau dann gilt, wenn

$$\begin{aligned} &\phi(d_1 t_1^{-q^2-q-1} t_2^2 + d_4 t_1^{q^2+q+1} t_2^{-1} - \text{Tr}(s^{q^2} d_3 t_1^{q^2+q+1} t_2^{-1}) + \\ &\text{Tr}(s^{q^2+q} d_2 t_1^{q^2+q+1} t_2^{-1}) + s^{q^2+q+1} d_1 t_1^{q^2+q+1} t_2^{-1}) = \phi(d_1 + d_4) \end{aligned}$$

ist. Also ist $\psi_3^x = \psi_3$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} &d_1(t_1^{-q^2-q-1} t_2^2 - 1) + d_4(t_1^{q^2+q+1} t_2^{-1} - 1) - \text{Tr}(s^{q^2} d_3 t_1^{q^2+q+1} t_2^{-1}) + \\ &\text{Tr}(s^{q^2+q} d_2 t_1^{q^2+q+1} t_2^{-1}) + s^{q^2+q+1} d_1 t_1^{q^2+q+1} t_2^{-1} \in \ker(\phi) \end{aligned} \quad (4.10)$$

für alle $(d_1, d_2, d_3, d_4) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_{q^3} \times \mathbb{F}_{q^3} \times \mathbb{F}_q$ gilt. Wir nehmen nun an, dass $\psi_3^x = \psi_3$ sei. Dann ist also (4.10) für alle d_1, d_2, d_3, d_4 erfüllt. Dies gilt insbesondere für $d_1 = d_3 = d_4 = 0$. Somit ist

$$\text{Tr}(s^{q^2+q} d_2 t_1^{q^2+q+1} t_2^{-1}) \in \ker(\phi)$$

für alle $d_2 \in \mathbb{F}_{q^3}$. Da $t_1, t_2 \neq 0$ sind und Tr surjektiv ist, folgt $s = 0$. Aus (4.10) folgt nun also

$$d_1(t_1^{-q^2-q-1} t_2^2 - 1) + d_4(t_1^{q^2+q+1} t_2^{-1} - 1) \in \ker(\phi) \quad (4.11)$$

für alle $d_1, d_4 \in \mathbb{F}_q$. Setzt man in (4.11) $d_1 = 0$ bzw. $d_4 = 0$, so folgt: $t_1^{q^2+q+1} = t_2$ bzw. $t_1^{q^2+q+1} = t_2^2$. Hieraus schließt man dann weiter: $t_1^{q^2+q+1} = 1$ und $t_2 = 1$ und somit $x = h(t, 1, t^q, t^{q^2})$ mit $t^{q^2+q+1} = 1$. Umgekehrt sieht man für jedes Element x der Form $x = h(t, 1, t^q, t^{q^2})$ mit $t^{q^2+q+1} = 1$ durch Einsetzen in (4.10) ein, dass $\psi_3^x = \psi_3$ gilt. Damit haben wir gezeigt: Für jedes Element $x = h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})x_\alpha(s)$ mit $t_1, t_2 \in \mathbb{F}$, $t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1$, $s \in \mathbb{F}_{q^3}$ gilt $\psi_3^x = \psi_3$ genau dann, wenn $x = h(t, 1, t^q, t^{q^2})$ mit $t^{q^2+q+1} = 1$ ist.

Für Elemente x der Form $x = x_\alpha(r)n_\alpha h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})x_\alpha(s)$ $t_1, t_2 \in \mathbb{F}$, $t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1$, $r, s \in \mathbb{F}_{q^3}$ verlaufen die Rechnungen analog. Es ergibt sich: $\psi_3^x = \psi_3$ gilt genau dann, wenn

$r = s = 0$, $t_1^{q^2+q+1} = 1$ und $t_2 = -1$ gilt. Also gilt wie in Satz 4.8.1, (c) behauptet:

$$\begin{aligned}\bar{I}_3 &= \langle n_\alpha h(1, -1, 1, 1), h(t, 1, t^q, t^{q^2}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q^2+q+1} = 1 \rangle \\ &= \{h(t, 1, t^q, t^{q^2}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q^2+q+1} = 1\} \cup \\ &\quad \{n_\alpha h(t, -1, t^q, t^{q^2}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q^2+q+1} = 1\},\end{aligned}$$

wobei die Vereinigung disjunkt ist. Insbesondere ist damit $|\bar{I}_3| = 2(q^2 + q + 1)$ gezeigt. Damit haben wir auch die Aussagen über $\bar{I}_3$ in Satz 4.8.1 bewiesen.

$\bar{I}_4$:

Wie wir bereits auf Seite 114 gesehen haben, zerfällt die Operation von L_P auf den linearen Charakteren von U_P in genau 5 Bahnen. Da $\bar{I}_0, \dots, \bar{I}_3$ unterschiedliche Ordnungen haben, liegen $\psi_0, \dots, \psi_3$ jeweils in verschiedenen Bahnen unter der Operation von L_P . Durch Summation der Bahnlangen folgt, dass die noch fehlende Bahn der Operation von L_P auf den linearen Charakteren von U_P die Länge $\frac{1}{2}q^3(q^3 - 1)(q^2 - 1)$ haben muss. Die Trägheitsfaktorgruppen der linearen Charaktere von U_P in dieser Bahn haben also jeweils die Ordnung $2(q^2 - q + 1)$. Wir betrachten die zyklische Untergruppe

$$\{h(t, 1, t^{-q}, t^{q-1}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q^2-q+1} = 1\}$$

der Ordnung $q^2 - q + 1$, die im getwisteten maximalen Torus $\mathbf{T}_2^F$ von L_P enthalten ist. Es sei h ein Erzeuger dieser zyklischen Gruppe. Wie man den Zentralisatorordnungen in Tabelle A.25 entnehmen kann, gibt es eine nichtzentrale Konjugiertenklasse von U_P , die unter Konjugation mit dem halbeinfachen Element h invariant bleibt. Aus dem Permutationslemma 4.1.1 folgt somit, dass es einen nichttrivialen linearen Charakter von U_P gibt, der unter Konjugation mit h invariant ist. Es sei ψ_4 ein solcher Charakter von U_P . Dann gilt also $|\bar{I}_4| = 2(q^2 - q + 1)$, und $\{h(t, 1, t^{-q}, t^{q-1}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q^2-q+1} = 1\}$ ist ein zyklischer Normalteiler vom Index 2 in $\bar{I}_4$. Es sei n_4 eine Involution in $\bar{I}_4$. Dann gilt:

$$\bar{I}_4 = \langle n_4 \rangle \ltimes \{h(t, 1, t^{-q}, t^{q-1}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q^2-q+1} = 1\}.$$

Um alle Aussagen in Satz 4.8.1 zu beweisen, müssen wir noch $C_{\bar{I}_4}(n_4) = \langle n_4 \rangle$ zeigen. Angenommen, dies sei falsch. Dann wäre

$$C_{\bar{I}_4}(n_4) \cap \{h(t, 1, t^{-q}, t^{q-1}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q^2-q+1} = 1\} \neq \{1\}.$$

Insbesondere gäbe es ein nichttriviales Element in $C_{\bar{I}_4}(n_4) \subseteq C_{L_P}(n_4)$, dessen Ordnung ein Teiler von $q^2 - q + 1$ ist. Aus den Zentralisatorordnungen in Tabelle A.17 im Anhang folgt daher (da $q^2 - q + 1$ und $(q^3 - 1)(q - 1)$ teilerfremd sind), dass n_4 zentral in L_P ist. Also wäre dann $\bar{I}_4$ zyklisch. D.h. es gäbe ein Element s der Ordnung $2(q^2 - q + 1)$, das einen nichttrivialen linearen Charakter von U_P unter Konjugation festlässt. Nach dem Permutationslemma 4.1.1 gäbe es dann auch eine nichtzentrale Konjugiertenklasse von U_P , die

unter Konjugation mit dem halbeinfachen Element s der Ordnung $2(q^2 - q + 1)$ invariant bleibt. Da die Konjugiertenklassenlängen von U_P Potenzen von p sind und s ein p' -Element ist, zentralisiert s sogar ein Element aus einer nichtzentralen Konjugiertenklassen von U_P . Das halbeinfache Element s läge wegen seiner Ordnung in einer Konjugiertenklasse vom halbeinfachen Klassentyp h_{11} oder h_{12} (siehe Tabelle A.23). Wie man der Tabelle A.25 entnimmt, sind alle Elemente aus U_P , die von solchen halbeinfachen Elementen zentralisiert werden, zentral in U_P . Dies ist ein Widerspruch. Also muss unsere obige Annahme falsch gewesen sein, und es gilt: $C_{\bar{I}_4}(n_4) = \langle n_4 \rangle$. Damit ist Satz 4.8.1 vollständig bewiesen. ■

4.9 Trägheitsgruppen in Q

Die parabolische Untergruppe Q operiert per Konjugation auf den irreduziblen Charakteren ihres unipotenten Radikals U_Q , die $X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ im Kern enthalten. In diesem Abschnitt beschreiben wir die Stabilisatoren, also die Trägheitsgruppen, dieser irreduziblen Charaktere von U_Q . Diese Trägheitsgruppen spielen eine Rolle bei der Konstruktion irreduzibler Charaktere von Q .

Zur Beschreibung der Konjugiertenklassen und irreduziblen Charaktere von U_Q benutzen wir die Bezeichnungen aus Abschnitt 4.7. Wir setzen auch in diesem Abschnitt die Primzahlpotenz q als ungerade voraus. Analog zu den Bezeichnungen bei den Trägheitsgruppen in P bezeichnen wir für $\vartheta \in \text{Irr}(U_Q)$ mit $I_Q(\vartheta)$ die Trägheitsgruppe von ϑ in Q und mit $\bar{I}_Q(\vartheta)$ die entsprechende Trägheitsfaktorgruppe in Q . Auf Grund der Levi-Zerlegung werden wir häufig $\bar{I}_Q(\vartheta)$ mit $I_Q(\vartheta) \cap L_Q$ identifizieren. Für die irreduziblen Charaktere von U_Q wählen wir die gleichen Bezeichnungen wie in Tabelle A.52. Für die Trägheitsgruppen der irreduziblen Charaktere von U_Q , die $X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ im Kern enthalten, gilt:

4.9.1 Satz (Trägheitsgruppen in Q)

Es sei ϕ ein nichttrivialer irreduzibler Charakter der additiven Gruppe von $\mathbb{F}_{q^3}$. Wir definieren $\psi_0, \psi_1, \psi_3 \in \text{Irr}(U_Q)$ durch:

$$\begin{aligned}\psi_0 &:= \chi_{1,1}, \\ \psi_1 &:= \chi_{\phi,1}, \\ \psi_3 &:= \chi_\phi.\end{aligned}$$

Dann existiert ein linearer Charakter ψ_2 von U_Q , so dass die folgenden Aussagen wahr sind:

- (a) $\{\psi_0, \dots, \psi_3\}$ ist ein Vertretersystem der Bahnen von Q auf der Menge der irreduziblen Charaktere von U_Q , die $X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ im Kern enthalten,

(b) die Trägheitsfaktorgruppen $\bar{I}_j := \bar{I}_Q(\psi_j)$, $j = 0, 1, \dots, 3$, haben die Ordnungen:

$$\begin{aligned} |\bar{I}_0| &= q(q^3 - 1)(q^2 - 1), \\ |\bar{I}_1| &= q(q - 1), \\ |\bar{I}_2| &= 1, \\ |\bar{I}_3| &= q(q^2 - 1). \end{aligned}$$

(c) für die Trägheitsfaktorgruppen gilt:

0. $\bar{I}_0 = L_Q$,
1. $\bar{I}_1 = \{h(t, t^2, t^q, t^{q^2})x_\beta(s) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q-1} = 1, s \in \mathbb{F}_q\}$,
2. $\bar{I}_2 = \{1\}$,
3. $\bar{I}_3 = \langle X_\beta, n_\beta, h(1, t, 1, 1) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q-1} = 1 \rangle$.

Beweis: Die Berechnungen der Trägheitsgruppen verlaufen analog zu den Rechnungen im Beweis von Satz 4.8.1, sie sind sogar deutlich einfacher. ■

4.10 Die Charaktertafel von P

In diesem Abschnitt bestimmen wir die Charaktertafel der maximalen parabolischen Untergruppe P . Wir behalten die Bezeichnungen aus Abschnitt 4.8 bei. Insbesondere setzen wir weiterhin voraus, dass q ungerade ist. Wir wählen die irreduziblen Charaktere $\psi_0, \dots, \psi_5$ von U_P wie in Satz 4.8.1. Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis des folgenden Satzes:

4.10.1 Satz

Die maximale parabolische Untergruppe P besitzt genau $q^4 + q^3 + q^2 + 3q + 7$ irreduzible Charaktere. Die Charaktertafel von P ist durch die Tabellen A.45 und A.46 im Anhang gegeben. Tabelle A.47 gibt zu jedem $\chi \in \text{Irr}(P)$ das eindeutig bestimmte $i \in \{0, \dots, 5\}$ mit $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_i) \neq 0$ an.

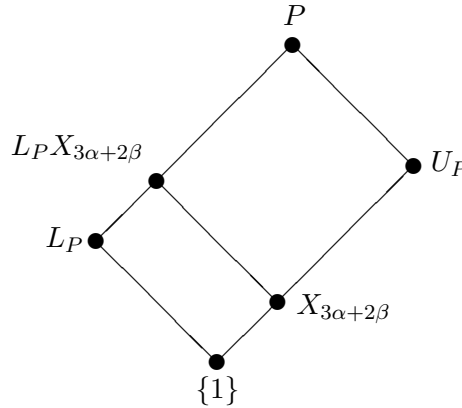
Zusatz:

Für $j = 0, \dots, 5$ bezeichne I_j die Trägheitsgruppe von ψ_j in P . Dann gibt es zu jedem $j = 0, \dots, 5$ einen irreduziblen Charakter von I_j , dessen Einschränkung auf U_P gleich ψ_j ist. Mit anderen Worten: Jeder der irreduziblen Charaktere ψ_j , $j = 0, \dots, 5$ setzt auf seine Trägheitsgruppe fort.

Beweis (von Satz und Zusatz):

Wesentliches Hilfsmittel zur Bestimmung der Charaktertafel von P ist die Clifford-Theorie

in Form der Sätze 4.1.2, 4.1.3, 4.1.5, 4.1.7 und 4.1.8. Speziell im Hinblick auf die Sätze 4.1.7 und 4.1.8 machen wir folgende Beobachtung: In Bemerkung 4.6.1 hatten wir gesehen, dass $X_{3\alpha+2\beta}$ die Kommutatorgruppe von U_P ist. Hieraus folgt einerseits, dass $X_{3\alpha+2\beta}$ ein Normalteiler von P ist, und andererseits, dass $\bar{U}_P := U_P/X_{3\alpha+2\beta}$ abelsch ist. Also besitzt $\bar{P}$ eine Zerlegung in ein semidirektes Produkt $\bar{P} = \bar{L}_P \ltimes \bar{U}_P$ mit der zu L_P isomorphen Untergruppe $\bar{L}_P := L_P X_{3\alpha+2\beta}/X_{3\alpha+2\beta}$ und dem abelschen Normalteiler $\bar{U}_P := U_P/X_{3\alpha+2\beta}$. Wir werden im Folgenden meistens L_P und $\bar{L}_P$ vermöge des kanonischen Isomorphismus $L_P \rightarrow \bar{L}_P, x \mapsto xX_{3\alpha+2\beta}$ miteinander identifizieren. Wir werden außerdem (mittels Inflation) die irreduziblen Charaktere von $\bar{U}_P$ mit den linearen Charakteren von U_P identifizieren.



Da $\bar{U}_P$ abelsch ist, können wir nun die Sätze 4.1.7 und 4.1.8 auf $\bar{P}$ anwenden. Die Operation von $\bar{L}_P$ auf $\text{Irr}(\bar{U}_P)$ entspricht der Operation von L_P auf den linearen Charakteren von U_P . Ein Vertretersystem für die Bahnen sowie die zugehörigen Trägheitsfaktorgruppen können wir daher direkt aus Satz 4.8.1 ablesen. Nach den Sätzen 4.1.3 und 4.8.1 gibt es zu jedem irreduziblen Charakter $\chi \in \text{Irr}(P)$ genau ein $i \in \{0, \dots, 5\}$ mit $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_i)_{U_P} \neq 0$. Für $\chi \in \text{Irr}(P)$ gilt hierbei $X_{3\alpha+2\beta} \subseteq \ker(\chi)$ genau dann, wenn $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_i)_{U_P} \neq 0$ für ein $i \in \{0, \dots, 4\}$. Dies lässt folgendes Vorgehen natürlich erscheinen:

Für $i = 0, \dots, 4$ bestimmt man die irreduziblen Charaktere von $\bar{I}_i$ und berechnet jeweils die Charaktere $(\psi \ltimes \psi_i)^P$, wobei ψ die irreduziblen Charaktere $\text{Irr}(\bar{I}_i)$ durchläuft. Nach Satz 4.1.8 und den obigen Vorbemerkungen erhält man so jeden irreduziblen Charakter $\chi \in \text{Irr}(P)$ mit $X_{3\alpha+2\beta} \subseteq \ker(\chi)$ auf diese Weise genau einmal. Die noch fehlenden irreduziblen Charaktere von P mit $X_{3\alpha+2\beta} \not\subseteq \ker(\chi)$ sind genau die irreduziblen Charaktere $\chi \in \text{Irr}(P)$ mit $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_5)_{U_P} \neq 0$. Nach Satz 4.1.5 erhält man diese irreduziblen Charaktere von P durch Induktion der irreduziblen Charaktere $\psi \in \text{Irr}(I_5)$ mit $(\psi \downarrow_{U_P}, \psi_5)_{U_P} \neq 0$. Es stellt sich später sogar heraus, dass ψ_5 auf I_5 fortsetzt, so dass man zur Berechnung dieser Charaktere ψ Satz 4.1.2 benutzen könnte. Bei diesem Vorgehen ergibt sich allerdings die Schwierigkeit, dass das Induzieren von Charakteren von I_5 nach P aufwendig ist. Wir wählen daher folgende Strategie zur Berechnung der irreduziblen Charaktere von P :

- [1] Für $i = 0, \dots, 4$ bestimmen wir die irreduziblen Charaktere von $\bar{I}_i$ und berechnen jeweils $(\psi \ltimes \psi_i)^P$, wobei ψ die irreduziblen Charaktere $\text{Irr}(\bar{I}_i)$ durchläuft.

- [2] Die noch fehlenden irreduziblen Charaktere von P mit $(\psi \downarrow_{U_P}, \psi_5)_{U_P} \neq 0$ berechnen wir durch Betrachtung von Produkten von Charakteren, Orthogonalitätsrelationen und mit Hilfe der Einschränkungen der unipotenten Charaktere von $G = {}^3D_4(q)$ auf P , die wir ja aus Abschnitt 4.2 kennen.

Wir beginnen nun mit der Durchführung dieser Strategie.

Es ist $\bar{I}_0 = L_P$ (vergleiche Satz 4.8.1, (c)). Die irreduziblen Charaktere von L_P kennen wir bereits aus Abschnitt 4.3 (vergleiche auch Tabelle A.37). Durch Inflation erhält man hieraus die irreduziblen Charaktere:

$$\begin{aligned}\chi_1(k) &:= \widehat{L_P \chi_1}(k), \\ \chi_2(k) &:= \widehat{L_P \chi_2}(k)\end{aligned}$$

für $k = 0, \dots, q-2$, und

$$\chi_3(k, l) := \widehat{L_P \chi_3}(k, l)$$

für $k = 0, \dots, q^3-2$, $l = 0, \dots, q-1$, $k \neq 0$, sowie

$$\chi_4(k) := \widehat{L_P \chi_4}(k)$$

für $k = 0, \dots, q^4 - q^3 + q - 2$ und $q^3 + 1 \nmid k$. Damit haben wir alle irreduziblen Charaktere χ von P mit $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_0)_{U_P} \neq 0$ gefunden.

Als nächstes wollen wir alle irreduziblen Charaktere χ von P mit $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_1)_{U_P} \neq 0$ ausrechnen. Hierzu bestimmen wir zunächst die irreduziblen Charaktere von $\bar{I}_1$. Nach Satz 4.8.1, (c) ist

$$\bar{I}_1 = \{h(t^2, t^{q^2+q+1}, t^{2q}, t^{2q^2})x_\alpha(s) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q^3-1} = 1, s \in \mathbb{F}_{q^3}\}.$$

Also ist $\bar{I}_1$ ein semidirektes Produkt

$$\bar{I}_1 = K \ltimes N$$

mit $K := \{h(t^2, t^{q^2+q+1}, t^{2q}, t^{2q^2}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q^3-1} = 1\}$ und dem abelschen Normalteiler $N := X_\alpha$. Zur Bestimmung der irreduziblen Charaktere von $\bar{I}_1$ können wir also Satz 4.1.8 benutzen. Die Operation von K auf N per Konjugation zerfällt in genau 2 Bahnen. Nach dem Permutationslemma 4.1.1 zerfällt somit auch die Operation von K auf $\text{Irr}(N)$ in genau 2 Bahnen: die Bahn des trivialen Charakters von N und die Bahn eines beliebigen nichttrivialen irreduziblen Charakters von N . Somit besitzt $\bar{I}_1$ genau q^3 verschiedene irreduzible Charaktere: $q^3 - 1$ lineare Charaktere sowie einen irreduziblen Charakter vom Grad $q^3 - 1$. Aus Satz 4.1.8 folgt daher: P besitzt genau q^3 irreduzible Charaktere χ mit $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_1)_{U_P} \neq 0$, nämlich die $q^3 - 1$ irreduziblen Charaktere $(\psi \ltimes \psi_1) \uparrow^P$, wobei

ψ die $q^3 - 1$ linearen Charaktere von $\bar{I}_1$ durchläuft, sowie einen irreduziblen Charakter $(\psi \ltimes \psi_1) \uparrow^P$, wobei ψ der nichtlineare irreduzible Charakter von $\bar{I}_1$ ist. Wir berechnen $(\psi \ltimes \psi_1) \uparrow^P$ vermöge

$$(\psi \ltimes \psi_1) \uparrow^P = ((\psi \ltimes \psi_1) \uparrow^B) \uparrow^P.$$

Die Charaktere $(\psi \ltimes \psi_1) \uparrow^B$ haben wir bereits in Abschnitt 4.5 ausgerechnet. Es sind dies die Charaktere ${}_B\chi_1(k)$, $k = 0, \dots, q^3 - 2$ bzw. ${}_B\chi_2$ aus Tabelle A.41. Da wir die Fusionen der Konjugiertenklassen von B nach P und die zugehörigen Zentralisatorordnungen kennen (vergleiche Tabellen A.11, A.25 und A.26), können wir die von B nach P induzierten Charaktere berechnen. Dies liefert die irreduziblen Charaktere

$$\chi_5(k) := {}_B\chi_1((q^2 + q - 1)k) \uparrow^P$$

für $k = 0, \dots, q^3 - 2$ und

$$\chi_6 := {}_B\chi_2 \uparrow^P$$

in Tabelle A.46. (Der Faktor $q^2 + q - 1$ in der Definition von χ_5 dient nur dazu, dass die Charakterwerte eine etwas „schönere“ Form annehmen. Man beachte, dass $q^2 + q - 1$ teilerfremd zu $q^3 - 1$ ist.) Die irreduziblen Charaktere χ von P mit $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_1)_{U_P} \neq 0$ haben wir damit alle gefunden.

Als nächstes wollen wir alle irreduziblen Charaktere χ von P mit $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_2)_{U_P} \neq 0$ ausrechnen. Hierzu bestimmen wir zunächst die irreduziblen Charaktere von $\bar{I}_2$. Nach Satz 4.8.1, (c) ist

$$\bar{I}_2 = \{h(t, t, t^q, t^{q^2})x_\alpha(s) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q-1} = 1, s \in \mathbb{F}_{q^3}, s^{q^2} + s^q + s = 0\}$$

Also ist $\bar{I}_2$ ein semidirektes Produkt

$$\bar{I}_2 = K \ltimes N$$

mit

$$K := \{h(t, t, t^q, t^{q^2}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q-1} = 1\}$$

und dem abelschen Normalteiler

$$N := \{x_\alpha(s) \mid s \in \mathbb{F}_{q^3}, s^{q^2} + s^q + s = 0\}.$$

Die irreduziblen Charaktere von $\bar{I}_2$ lassen sich auf analoge Weise wie bei $\bar{I}_1$ bestimmen. $\bar{I}_2$ besitzt genau $2q$ irreduzible Charaktere, nämlich genau $q - 1$ lineare Charaktere sowie $q + 1$ irreduzible Charaktere vom Grad $q - 1$. Aus Satz 4.1.8 folgt daher: P besitzt genau $2q$ irreduzible Charaktere χ mit $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_2)_{U_P} \neq 0$, nämlich die $q - 1$ irreduziblen Charaktere $(\psi \ltimes \psi_2) \uparrow^P$ vom Grad $q(q^6 - 1)$, wobei ψ die $q - 1$ linearen Charaktere von $\bar{I}_2$ durchläuft, sowie $q + 1$ irreduzible Charaktere $(\psi \ltimes \psi_2) \uparrow^P$ vom Grad $q(q^6 - 1)(q - 1)$, wobei

ψ ein Vertretersystem derjenigen Bahnen von K auf $\text{Irr}(N)$ durchläuft, die den trivialen Charakter $\mathbf{1}_N$ nicht enthalten.

Wir berechnen zunächst die $q-1$ irreduziblen Charaktere $(\psi \ltimes \psi_2) \uparrow^P$, wobei ψ die linearen Charaktere von $\bar{I}_2$ durchläuft. Eine direkte Berechnung dieser Charaktere ist schwierig. (Dies liegt hauptsächlich daran, dass wir die in der Definition von $\bar{I}_2$ auftretenden Elemente $x_\alpha(s)$ mit $s^{q^2} + s^q + s = 0$ nicht explizit hinschreiben können.) Daher wählen wir eine etwas andere Vorgehensweise. Für $k = 0, \dots, q-2$ definieren wir die Charaktere

$$\chi_7(k) := {}_B\chi_3 \uparrow^P$$

von P . Durch Berechnung ihrer Norm weist man nach, dass die $\chi_7(k)$ irreduzible Charaktere von P sind, und an Hand ihrer Charakterwerte sieht man, dass sie paarweise verschieden sind. Wir haben somit $q-1$ verschiedene irreduzible Charaktere vom Grad $q(q^6-1)$ von P konstruiert. Wegen

$$(\chi_7(k)_{U_P}, \psi_2)_{U_P} = (\chi_7(k), \psi_2^P)_P = (\chi_7(k), {}_B\chi_4^P)_P = 1$$

haben wir

$$\{\chi_7(k) \mid k = 0, \dots, q-2\} = \{(\psi \ltimes \psi_2) \uparrow^P \mid \psi \text{ linearer Charakter von } \bar{I}_2\}.$$

Dies liefert die irreduziblen Charaktere $\chi_7(k)$, $k = 0, \dots, q-2$ in Tabelle A.46.

Wir kommen nun zu den $q+1$ irreduziblen Charakteren $(\psi \ltimes \psi_2) \uparrow^P$, wobei ψ die nicht-trivialen irreduziblen Charaktere von N durchläuft. Wir können diese Charaktere nicht explizit berechnen, da sie sich auf den unipotenten Konjugiertenklassen $c_{1,9}^P$ unterscheiden, für die wir keine explizite generische Beschreibung haben (vergleiche Tabelle A.25). Wir können jedoch

$$\chi_8 := \sum_{\psi} (\psi \ltimes \psi_2) \uparrow^P$$

ausrechnen, wobei sich die Summe über die Charaktere ψ aus einem Vertretersystem der $q+1$ Bahnen von K auf $\text{Irr}(N)$ erstreckt, die den trivialen Charakter $\mathbf{1}_N$ nicht enthalten. Aus den Sätzen 4.1.2 und 4.1.5 folgt

$$\psi_2 \uparrow^P = \sum_{k=0}^{q-2} \chi_7(k) + (q-1)\chi_8.$$

Wegen der Definition von ${}_B\chi_4$ und Bemerkung 4.5.1 gilt $\psi_2 \uparrow^P = {}_B\chi_4 \uparrow^P$, also

$$\chi_8 = \frac{1}{q-1} \left({}_B\chi_4 \uparrow^P - \sum_{k=0}^{q-2} \chi_7(k) \right).$$

Dies liefert den Charakter χ_8 in Tabelle A.46. Damit haben wir alle irreduziblen Charaktere χ von P mit $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_2)_{U_P} \neq 0$ gefunden.

Als nächstes wollen wir alle irreduziblen Charaktere χ von P mit $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_3)_{U_P} \neq 0$ ausrechnen. Hierzu bestimmen wir zunächst die irreduziblen Charaktere von $\bar{I}_3$. Nach Satz 4.8.1, (c) ist

$$\bar{I}_3 = \langle n_\alpha h(1, -1, 1, 1), h(t, 1, t^q, t^{q^2}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q^2+q+1} = 1 \rangle.$$

Also ist $\bar{I}_3$ ein semidirektes Produkt

$$\bar{I}_3 = K \ltimes N$$

aus der Untergruppe

$$K := \langle n_\alpha h(1, -1, 1, 1) \rangle$$

der Ordnung 2 und dem zyklischen Normalteiler

$$N := \{h(t, 1, t^q, t^{q^2}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q^2+q+1} = 1\}.$$

Die irreduziblen Charaktere von $\bar{I}_3$ lassen sich auf analoge Weise wie bei $\bar{I}_1$ bestimmen. $\bar{I}_3$ besitzt genau $\frac{q^2+q}{2} + 2$ irreduzible Charaktere, nämlich genau 2 lineare Charaktere sowie $\frac{q^2+q}{2}$ irreduzible Charaktere vom Grad 2. Es sei $\mathbf{1}_{\bar{I}_3}$ der triviale Charakter von $\bar{I}_3$ und $\varepsilon_{\bar{I}_3}$ der nichttriviale lineare Charakter von $\bar{I}_3$. Aus Satz 4.1.8 folgt nun: P besitzt genau $\frac{q^2+q}{2} + 2$ irreduzible Charaktere χ mit $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_3)_{U_P} \neq 0$, nämlich die 2 irreduziblen Charaktere

$$\begin{aligned} \chi_9 &:= (\mathbf{1}_{\bar{I}_3} \ltimes \psi_3) \uparrow^P \text{ und} \\ \chi_{10} &:= (\varepsilon_{\bar{I}_3} \ltimes \psi_3) \uparrow^P \end{aligned}$$

vom Grad $\frac{1}{2}q^3(q^3+1)(q-1)^2$ sowie $\frac{q^2+q}{2}$ irreduzible Charaktere

$$(\psi \ltimes \psi_3) \uparrow^P$$

vom Grad $q^3(q^3+1)(q-1)^2$, wobei ψ ein Vertretersystem derjenigen Bahnen von K auf $\text{Irr}(N)$ durchläuft, die den trivialen Charakter $\mathbf{1}_N$ nicht enthalten.

Wir beginnen mit der Bestimmung der Charakterwerte von χ_9 und χ_{10} . Aus der Definition von ${}_B\chi_5(0)$ und den Sätzen 4.1.2 und 4.1.5 folgt zunächst einmal

$${}_B\chi_5(0) \uparrow^P = \chi_9 + \chi_{10}. \tag{4.12}$$

Die linke Seite können wir aus Tabelle A.41 und durch Induzieren von B nach P ausrechnen. Nach Definition von $\varepsilon_{\bar{I}_3}$ nehmen $\chi_9 = (\mathbf{1}_{\bar{I}_3} \ltimes \psi_3) \uparrow^P$ und $\chi_{10} = (\varepsilon_{\bar{I}_3} \ltimes \psi_3) \uparrow^P$ auf

allen Konjugiertenklassen von P die gleichen Werte an außer auf den Konjugiertenklassen vom Typ $c_{3,0}, \dots, c_{3,4}$. Auf diesen Konjugiertenklassen unterscheiden sich die Werte von χ_9 und χ_{10} genau im Vorzeichen. Ist $x \in P$ in einer Konjugiertenklasse, die nicht vom Typ $c_{3,j}$ ist, so können wir daher $\chi_9(x)$ und $\chi_{10}(x)$ nach (4.12) durch

$$\chi_9(x) = \chi_{10}(x) = \frac{1}{2} ({}_B\chi_5(0) \uparrow^P (x))$$

ausrechnen. Wir müssen nun noch die Werte von χ_9 und χ_{10} auf den Konjugiertenklassen der Typen $c_{3,j}$, $j = 0, \dots, 4$ bestimmen. Für $j = 0, \dots, 4$ sei $x_j \in P$ in einer Konjugiertenklasse von P vom Typ $c_{3,j}$ enthalten. Den Charakterwert $\chi_9(x_0)$ können wir mit Hilfe der Induktionsformel (4.2) ausrechnen:

$$\chi_9(x_0) = \frac{|C_P(x_0)|}{|C_{I_3}(x_0)|} = \frac{q^4(q^3 - 1)(q - 1)}{2q^4} = \frac{1}{2}(q^3 - 1)(q - 1).$$

Die noch fehlenden vier Charakterwerte $\chi_9(x_1), \dots, \chi_9(x_4)$ erhalten wir durch Lösen des durch

$$\begin{aligned} (\chi_9, \chi_1(0))_P &= 0, \\ (\chi_9, \chi_5(0))_P &= 0, \\ (\chi_9, \chi_7(0))_P &= 0 \end{aligned}$$

gegebenen linearen Gleichungssystems und der zusätzlichen Bedingung $(\chi_9, [\rho_2] \downarrow_P)_P \in \mathbb{Z}$. Damit kennen wir alle Charakterwerte von χ_9 . Den irreduziblen Charakter χ_{10} können wir nun mittels (4.12) bestimmen.

Wir berechnen nun noch die irreduziblen Charaktere $(\psi \ltimes \psi_3) \uparrow^P$, wobei ψ ein Vertretersystem derjenigen Bahnen von K auf $\text{Irr}(N)$ durchläuft, die den trivialen Charakter $\mathbf{1}_N$ nicht enthalten. Es sei $\mathcal{S}$ ein solches Vertretersystem. Für $k = 1, \dots, q^2 + q$ setzen wir

$$\chi_{11}(k) := {}_B\chi_5(k) \uparrow^P.$$

Nach Konstruktion von ${}_B\chi_5(k)$ und Definition der $\psi \ltimes \psi_3$, $\psi \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\{\chi_{11}(k) \mid k = 1, \dots, q^2 + q\} = \{(\psi \ltimes \psi_3) \uparrow^P \mid \psi \in \mathcal{S}\}.$$

Dies liefert die irreduziblen Charaktere $\chi_{11}(k)$, $k = 0, \dots, q^2 + q$, $k \neq 0$ in Tabelle A.46. Damit haben wir alle irreduziblen Charaktere χ von P mit $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_3)_{U_P} \neq 0$ gefunden.

Als nächstes wollen wir alle irreduziblen Charaktere χ von P mit $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_4)_{U_P} \neq 0$ ausrechnen. Hierzu bestimmen wir zunächst die irreduziblen Charaktere von $\bar{I}_4$. Nach Satz 4.8.1, (c) ist $\bar{I}_4$ ein semidirektes Produkt

$$\bar{I}_4 = K \ltimes N$$

aus der Untergruppe

$$K := \langle n_4 \rangle$$

der Ordnung 2 und dem zyklischen Normalteiler

$$N := \{h(t, 1, t^{-q}, t^{q-1}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q^2-q+1} = 1\}.$$

Die irreduziblen Charaktere von $\bar{I}_4$ lassen sich auf analoge Weise wie bei $\bar{I}_3$ bestimmen. $\bar{I}_4$ besitzt genau $\frac{q^2-q}{2} + 2$ irreduzible Charaktere, nämlich genau 2 lineare Charaktere sowie $\frac{q^2-q}{2}$ irreduzible Charaktere vom Grad 2. Es sei $\mathbf{1}_{\bar{I}_4}$ der triviale Charakter von $\bar{I}_4$ und $\varepsilon_{\bar{I}_4}$ der nichttriviale lineare Charakter von $\bar{I}_4$. Aus Satz 4.1.8 folgt nun: P besitzt genau $\frac{q^2-q}{2} + 2$ irreduzible Charaktere χ mit $(\chi|_{U_P}, \psi_4)_{U_P} \neq 0$, nämlich die 2 irreduziblen Charaktere

$$\chi_{12} := (\mathbf{1}_{\bar{I}_4} \rtimes \psi_4)^\uparrow^P \text{ und} \quad (4.13)$$

$$\chi_{13} := (\varepsilon_{\bar{I}_4} \rtimes \psi_4)^\uparrow^P \quad (4.14)$$

vom Grad $\frac{1}{2}q^3(q^3-1)(q^2-1)$ sowie $\frac{q^2-q}{2}$ irreduzible Charaktere

$$(\psi \rtimes \psi_4)^\uparrow^P$$

vom Grad $q^3(q^3-1)(q^2-1)$, wobei ψ ein Vertretersystem derjenigen Bahnen von K auf $\text{Irr}(N)$ durchläuft, die den trivialen Charakter $\mathbf{1}_N$ nicht enthalten.

Wir beginnen mit der Konstruktion der irreduziblen Charaktere $(\psi \rtimes \psi_4)^\uparrow^P$, wobei ψ ein Vertretersystem derjenigen Bahnen von K auf $\text{Irr}(N)$ durchläuft, die den trivialen Charakter $\mathbf{1}_N$ nicht enthalten. Es sei $\mathcal{S}$ ein solches Vertretersystem. Wir benutzen die Bezeichnungen aus den Tabellen 3.1 und 4.3. Es sei $H := NU_P$. Für $k = 0, \dots, q^2 - q$ ist dann

$$\vartheta_k : \begin{array}{ccc} NU_P & \rightarrow & \mathbb{C}^\times \\ h(\tilde{\varphi}_6^i, 1, \tilde{\varphi}_6^{-qi}, \tilde{\varphi}_6^{(q-1)i})u & \mapsto & \varphi_6^{ik} \psi_4(u) \end{array}$$

ein irreduzibler Charakter von NU_P . Wir setzen für $k = 0, \dots, q^2 - q$

$$\chi_{14}(k) := \vartheta_k^\uparrow^P. \quad (4.15)$$

Nach Konstruktion von $\chi_{14}(k)$ und Definition von χ_{12} , χ_{13} und $\psi \rtimes \psi_4$ für $\psi \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\{\chi_{14}(k) \mid k = 1, \dots, q^2 - q\} = \{(\psi \rtimes \psi_4)^\uparrow^P \mid \psi \in \mathcal{S}\}$$

sowie

$$\chi_{14}(0) = \chi_{12} + \chi_{13}. \quad (4.16)$$

Wir wollen nun die Charakterwerte von $\chi_{14}(k)$ für $k = 0, \dots, q^2 - q$ ausrechnen. Nach Konstruktion hat $\chi_{14}(k)$ den Grad $q^3(q^3 - 1)(q^2 - 1)$. Wegen

$$X_{3\alpha+2\beta} \subseteq \ker(\chi_{14}(k)) \quad (4.17)$$

hat $\chi_{14}(k)$ auf den unipotenten Konjugiertenklassen von P der Typen $c_{1,0}$ und $c_{1,1}$ den Wert $q^3(q^3 - 1)(q^2 - 1)$. Die Werte von $\chi_{14}(k)$ auf den Konjugiertenklassen von P der Typen $c_{1,2}$, $c_{1,3}$, $c_{1,5}$ und $c_{1,7}$ bezeichnen wir mit x_2 , x_3 , x_5 bzw. x_7 . Aus der Definition der $\chi_{14}(k)$ folgt, dass diese x_i nicht von k abhängen. Aus der Induktionsformel (4.2) folgt ferner, dass die $\chi_{14}(k)$ auf den Konjugiertenklassen von P vom Typ $c_{10,0}(i)$ die Werte $(q^2 - 1)(\varphi_6^{ik} + \varphi_6^{-ik})$ annehmen. Wegen (4.17) nehmen die $\chi_{14}(k)$ dann auch auf den Konjugiertenklassen von P vom Typ $c_{10,1}(i)$ die Werte $(q^2 - 1)(\varphi_6^{ik} + \varphi_6^{-ik})$ an. Die Induktionsformel (4.2) liefert weiter, dass die $\chi_{14}(k)$ auf den Konjugiertenklassen von P vom Typ $c_{10,2}(i)$ die Werte $x_{10}(\varphi_6^{ik} + \varphi_6^{-ik})$ mit einem von i und k unabhängigen x_{10} haben. Alle anderen Konjugiertenklassen von P sind disjunkt zu H , so dass $\chi_{14}(k)$ auf ihnen den Wert 0 besitzt. Die Bedingungen

$$\begin{aligned} (\chi_{14}(k), \chi_1(0)) &= 0, \\ (\chi_{14}(k), \chi_2(0)) &= 0, \\ (\chi_{14}(k), \chi_5(0)) &= 0, \\ (\chi_{14}(k), \chi_7(0)) &= 0, \\ (\chi_{14}(k), \chi_9) &= 0 \end{aligned}$$

liefern dann ein lineares Gleichungssystem in x_2 , x_3 , x_5 , x_7 und x_{10} . Lösen dieses Systems ergibt dann:

$$\begin{aligned} x_2 &= -q^3(q^3 - 1), \\ x_3 &= -q^3(q - 1), \\ x_5 &= 0, \\ x_7 &= 2q^3, \\ x_{10} &= -1. \end{aligned}$$

Damit kennen wir alle Charakterwerte von $\chi_{14}(k)$, $k = 0, \dots, q^2 - q$. Dies liefert die irreduziblen Charaktere $\chi_{14}(k)$, $k = 0, \dots, q^2 - q$, $k \neq 0$ in Tabelle A.46.

Bei der Berechnung von χ_{12} und χ_{13} stützen wir uns auf (4.16). Die linke Seite von (4.16) haben wir soeben berechnet. Nach Definition von $\varepsilon_{\bar{I}_4}$ nehmen $\chi_{12} = (\mathbf{1}_{\bar{I}_4} \rtimes \psi_4) \uparrow^P$ und $\chi_{13} = (\varepsilon_{\bar{I}_4} \rtimes \psi_4) \uparrow^P$ auf allen Konjugiertenklassen von P die gleichen Werte an außer auf den Konjugiertenklassen vom Typ $c_{3,0}, \dots, c_{3,4}$. Auf diesen Konjugiertenklassen unterscheiden

sich die Werte von χ_{12} und χ_{13} genau im Vorzeichen. Ist $x \in P$ in einer Konjugiertenklasse, die nicht vom Typ $c_{3,j}$ ist, so können wir daher $\chi_{12}(x)$ und $\chi_{13}(x)$ nach (4.16) durch

$$\chi_{12}(x) = \chi_{13}(x) = \frac{1}{2}\chi_{14}(0)$$

ausrechnen. Wir müssen nun noch die Werte von χ_{12} und χ_{13} auf den Konjugiertenklassen der Typen $c_{3,j}$, $j = 0, \dots, 4$ bestimmen. Für $j = 0, \dots, 4$ sei $x_j \in P$ in einer Konjugiertenklasse vom Typ $c_{3,j}$ enthalten. Den Charakterwert $\chi_{12}(x_0)$ können wir mit Hilfe der Induktionsformel (4.2) ausrechnen:

$$\chi_{12}(x_0) = \frac{|C_P(x_0)|}{|C_{I_4}(x_0)|} = \frac{q^4(q^3 - 1)(q - 1)}{2q^4} = \frac{1}{2}(q^3 - 1)(q - 1).$$

Die vier noch fehlenden Charakterwerte $\chi_{12}(x_1), \dots, \chi_{12}(x_4)$ ergeben sich durch Lösen des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} (\chi_{12}, \chi_1(0))_P &= 0, \\ (\chi_{12}, \chi_5(0))_P &= 0, \\ (\chi_{12}, \chi_7(0))_P &= 0, \\ (\chi_{12}, \chi_9)_P &= 0. \end{aligned}$$

Somit kennen wir alle Charakterwerte von χ_{12} . Den irreduziblen Charakter χ_{13} können wir nun mittels (4.16) bestimmen. Damit haben wir alle irreduziblen Charaktere χ von P mit $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_4)_{U_P} \neq 0$ ausgerechnet.

Wir beginnen nun mit der Konstruktion der irreduziblen Charaktere ψ von P mit $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_5)_{U_P} \neq 0$. Man stellt zunächst einmal fest:

$$\begin{aligned} ([\varepsilon_1] \downarrow_P, [\varepsilon_1]_P)_P &= 3, \\ ([\varepsilon_1] \downarrow_P, \chi_1(0))_P &= 1, \\ ([\varepsilon_1] \downarrow_P, \chi_5(0))_P &= 1. \end{aligned}$$

Also ist

$$\chi_{15} := [\varepsilon_1] \downarrow_P - \chi_1(0) - \chi_5(0)$$

ein irreduzibler Charakter von P . An den Charakterwerten von χ_{15} erkennt man

$$X_{3\alpha+2\beta} \not\subseteq \ker(\chi_{15}).$$

Somit gilt $(\chi_{15} \downarrow_{U_P}, \psi_5)_{U_P} \neq 0$. Aus dem Charaktergrad folgt weiter die schon auf Seite 119 gemachte Anmerkung, dass ψ_5 auf I_5 fortsetzt.

Als nächstes betrachten wir die Charaktere

$$\chi_{21}(k) := {}_B\chi_6(k) \uparrow^P.$$

für $k = 0, \dots, q^3 - 2$. Wegen $(\chi_{21}(k), \chi_{21}(k))_P = 1$ sind diese Charaktere für $k \neq 0, \frac{q^3-1}{2}$ irreduzibel. Dies liefert die irreduziblen Charaktere $\chi_{21}(k)$ in Tabelle A.46. Für $k = 0$ gilt

$$\begin{aligned} (\chi_{21}(0), \chi_{21}(0))_P &= 2, \\ (\chi_{21}(0), \chi_{15})_P &= 1, \end{aligned}$$

Also ist

$$\chi_{16} := \chi_{21}(0) - \chi_{15}$$

ein irreduzibler Charakter von P . An den Charakterwerten von χ_{16} erkennt man

$$X_{3\alpha+2\beta} \not\subseteq \ker(\chi_{16}).$$

Somit gilt $(\chi_{16} \downarrow_{U_P}, \psi_5)_{U_P} \neq 0$.

Wir setzen für $k = 0, \dots, q^3$

$$\chi_{22}(k) := \chi_4(k) \cdot \chi_{15}.$$

Für $k \neq 0, \frac{q^3+1}{2}$ ist $\chi_{22}(k)$ ein Charakter von P und wegen $(\chi_{22}(k), \chi_{22}(k))_P = 1$ irreduzibel. An den Charakterwerten von $\chi_{22}(k)$ erkennt man

$$X_{3\alpha+2\beta} \not\subseteq \ker(\chi_{22}(k))$$

für $k = 0, \dots, q^3, k \neq 0, \frac{q^3+1}{2}$. Somit gilt $(\chi_{22} \downarrow_{U_P}, \psi_5)_{U_P} \neq 0$.

Um weitere irreduzible Charaktere von P zu konstruieren, stellt man zunächst fest, dass

$$({}^3D_4[1] \downarrow_P, \chi_{21}(k)) = 1$$

ist für alle durch $q^2 + q + 1$ teilbaren $k \in \{0, \dots, q^3 - 2\}, k \neq 0, \frac{q^3-1}{2}$. Es gilt ferner

$$\begin{aligned} ({}^3D_4[1] \downarrow_P, \chi_{15}) &= 1, \\ ({}^3D_4[1] \downarrow_P, \chi_{17}) &= 1. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$\chi_{17} := {}^3D_4[1] \downarrow_P - \chi_{10} - \chi_{15} - \sum'_{\substack{k \\ q^2+q+1|k}} \chi_{21}(k). \quad (4.18)$$

Hierbei bedeutet $\sum' \dots$, dass wir nur über die *verschiedenen* Charaktere $\chi_{21}(k)$ mit $q^2 + q + 1$ teilt k , $k \neq 0, \frac{q^3-1}{2}$ summieren. Die rechte Seite von (4.18) können wir ausrechnen.

Man erhält $(\chi_{17}, \chi_{17})_P = 1$. Also haben wir mit χ_{17} einen weiteren irreduziblen Charakter von P gefunden. Als nächstes rechnet man

$$\begin{aligned} \left(\chi_{21} \left(\frac{q^3 - 1}{2} \right), \chi_{21} \left(\frac{q^3 - 1}{2} \right) \right) &= 2 \text{ und} \\ \left(\chi_{21} \left(\frac{q^3 - 1}{2} \right), \chi_{17} \right) &= 1 \end{aligned}$$

nach. Also ist

$$\chi_{18} := \chi_{21} \left(\frac{q^3 - 1}{2} \right) - \chi_{17}$$

ein weiterer irreduzibler Charakter von P . An den Charakterwerten von χ_{17} und χ_{18} erkennt man

$$X_{3\alpha+2\beta} \not\subseteq \ker(\chi_{17}), \ker(\chi_{18}).$$

Somit gilt $(\chi_i \downarrow_{U_P}, \psi_5)_{U_P} \neq 0$ für $i = 17, 18$. Ferner hat man

$$\begin{aligned} ({}^3D_4[-1] \downarrow_P, \chi_{13}) &= 1, \\ ({}^3D_4[-1] \downarrow_P, \chi_{22}(k)) &= 1 \end{aligned}$$

für alle durch $q^2 - q + 1$ teilbaren $k \in \{0, \dots, q^3\} - \{0, \frac{q^3+1}{2}\}$. Wir setzen

$$\chi_{19} := {}^3D_4[-1] \downarrow_P - \chi_{13} - \sum'_{\substack{k \\ q^2-q+1|k}} \chi_{22}(k). \quad (4.19)$$

Hierbei bedeutet $\sum' \dots$, dass wir nur über die *verschiedenen* Charakteren $\chi_{22}(k)$ mit $q^2 - q + 1$ teilt k , $k \neq 0, \frac{q^3+1}{2}$ summieren. Die rechte Seite von (4.19) können wir ausrechnen. Man erhält $(\chi_{19}, \chi_{19})_P = 1$. Also haben wir mit χ_{19} einen weiteren irreduziblen Charakter von P gefunden. Auf analoge Weise konstruiert man den Charakter

$$\chi_{20} := [\rho_2] \downarrow_P - \mathbf{1}_P - \chi_2(0) - \chi_5(0) - \chi_7(0) - \chi_{12} - \chi_{16} - \sum'_{\substack{k \\ q^2-q+1|k}} \chi_{22}(k).$$

Die Irreduzibilität von χ_{20} folgt aus $(\chi_{20}, \chi_{20})_P = 1$. Damit haben wir alle irreduziblen Charaktere von P bestimmt und Satz 4.10.1 vollständig bewiesen. ■

In den nächsten Kapiteln werden für uns die Einschränkungen der unipotenten Charaktere von $G = {}^3D_4(q)$ auf P von Interesse sein. Für jeden unipotenten Charakter ψ von G sind in Tabelle A.48 im Anhang die Koeffizienten c_χ in der Zerlegung

$$\psi \downarrow_P = \sum_{\chi \in \text{Irr}(P)} c_\chi \chi$$

aufgeführt.

4.11 Irreduzible Charaktere von Q

In diesem Abschnitt bestimmen wir alle irreduziblen Charaktere der maximalen parabolischen Untergruppe Q , die das Zentrum $Z(U_Q) = X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ des unipotenten Radikals von Q im Kern enthalten. Eine Begründung dafür, dass wir nicht alle irreduziblen Charaktere von Q berechnen, geben wir in Bemerkung 4.11.2 am Ende dieses Abschnitts.

Wir behalten die Bezeichnungen aus Abschnitt 4.9 bei. Insbesondere setzen wir weiterhin voraus, dass q ungerade ist. Es sei ϕ ein irreduzibler Charakter der additiven Gruppe von $\mathbb{F}_{q^3}$, der nichttrivial auf $\mathbb{F}_q$ einschränkt. Wir wählen die irreduziblen Charaktere $\psi_0, \dots, \psi_3$ von U_Q wie in Satz 4.9.1. Die zugehörigen Trägheits- und Trägheitsfaktorguppen bezeichnen wir wie in Abschnitt 4.9 mit $I_0, \dots, I_3$ bzw. $\bar{I}_0, \dots, \bar{I}_3$. Dann gilt:

4.11.1 Satz

Die maximale parabolische Untergruppe Q besitzt genau $q^4 + q^3 + q + 4$ irreduzible Charaktere, die $X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ im Kern enthalten. Diese Charaktere von Q sind durch die Tabellen A.53 und A.54 im Anhang gegeben.

Beweis:

Die Konstruktion der irreduziblen Charaktere in Tabelle A.54 verläuft in weiten Teilen analog zur Bestimmung der Charaktertafel von P . Wir geben daher hier für jeden irreduziblen Charakter in Tabelle A.54 nur eine kurze Beschreibung der Konstruktion dieses Charakters an ohne die Details der Rechnungen auszuführen.

Wir wählen die Elemente $\tau \in \mathbb{F}_{q^3}^\times$ und $\pi \in \mathbb{F}_q^\times$ wie in Abschnitt 4.5. Man beachte, dass der Normalteiler $X_{2\alpha+\beta}X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ von Q im Kern von $\psi_0, \dots, \psi_2$ enthalten ist und dass die Faktorgruppe $U_Q/X_{2\alpha+\beta}X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ abelsch ist. Wir können daher zur Konstruktion aller irreduziblen Charaktere von Q , die ψ_0, ψ_1 oder ψ_2 überlagern, Satz 4.1.8 benutzen.

Die irreduziblen Charaktere $\chi_1(k), \chi_2(k), \chi_3(k, l)$ und $\chi_4(k)$ aus Tabelle A.54 erhält man durch Inflation der irreduziblen Charaktere ${}_{L_Q}\chi_1(k), {}_{L_Q}\chi_2(k), {}_{L_Q}\chi_3(k, l)$ bzw. ${}_{L_Q}\chi_4(k)$ von L_Q nach Q . Damit haben wir alle irreduziblen Charaktere χ von Q mit $(\chi|_{U_Q}, \psi_0)_{U_Q} \neq 0$ konstruiert.

Wir konstruieren nun die irreduziblen Charaktere χ von Q mit $(\chi|_{U_Q}, \psi_1)_{U_Q} \neq 0$. Nach Satz 4.9.1, (c) ist

$$\bar{I}_1 = \{h(t, t^2, t^q, t^{q^2})x_\beta(s) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q-1} = 1, s \in \mathbb{F}_q\}.$$

Also ist $\bar{I}_1$ ein semidirektes Produkt

$$\bar{I}_1 = K \ltimes X_\beta$$

mit $K := \{h(t, t^2, t^q, t^{q^2}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q-1} = 1\}$. Aus Satz 4.1.8 folgt, dass $\bar{I}_1$ genau q verschiedene irreduzible Charaktere besitzt: $q-1$ lineare Charaktere sowie einen irreduziblen

Charakter vom Grad $q-1$. Aus Satz 4.1.8 folgt daher weiter: Q besitzt genau q irreduzible Charaktere χ mit $(\chi \downarrow_{U_Q}, \psi_1)_{U_Q} \neq 0$, nämlich die $q-1$ irreduziblen Charaktere $(\psi \times \psi_1) \uparrow^Q$, wobei ψ die $q-1$ linearen Charaktere von $\bar{I}_1$ durchläuft, sowie einen irreduziblen Charakter $(\psi \times \psi_1) \uparrow^Q$, wobei ψ der nichtlineare irreduzible Charakter von $\bar{I}_1$ ist. Diese q irreduziblen Charaktere von Q kann man wie folgt berechnen: Für $k = 0, \dots, q-2$ ist

$$\varphi_k : h(\pi^i, \pi^{2i}) x_\alpha(d_1) x_\beta(d_2) x_{\alpha+\beta}(d_3) x_{2\alpha+\beta}(d_4) x_{3\alpha+\beta}(d_5) x_{3\alpha+2\beta}(d_6) \mapsto \zeta_1^{ik} \phi(d_1)$$

ein linearer Charakter von I_1 . Wir setzen

$$\chi_5(k) := \varphi_k \uparrow^Q = (\varphi_k \uparrow^B) \uparrow^Q$$

für $k = 0, \dots, q-2$. Wir definieren ferner:

$$\chi_6 := {}_B\chi_2 \uparrow^Q.$$

Dann sind $\chi_5(k)$, $k = 0, \dots, q-2$ und χ_6 genau die irreduziblen Charaktere von Q , die ψ_1 überlagern. Da wir die Fusionen der Konjugiertenklassen von B nach Q und die zugehörigen Zentralisatorordnungen kennen (vergleiche Tabellen A.11, A.26 und A.31), können wir die von B nach Q induzierten Charaktere ausrechnen. Damit haben wir also alle irreduziblen Charaktere von Q berechnet, die ψ_1 überlagern.

Wegen $\bar{I}_2 = \{1\}$ gibt es genau einen irreduziblen Charakter χ_7 von Q , der ψ_2 überlagert. Der Charakter χ_7 entsteht durch Induktion eines linearen Charakters von U_Q (den wir allerdings nicht kennen). Also verschwindet χ_7 auf allen nicht-unipotenten Konjugiertenklassen von Q und auf den unipotenten Klassen $c_{1,2}, c_{1,5}, c_{1,6}, c_{1,7}, c_{1,9}, c_{1,10}, c_{1,12}, c_{1,14}$, die nicht im unipotenten Radikal U_Q enthalten sind. Wegen $X_{2\alpha+\beta} X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta} \subseteq \ker(\chi_7)$ nimmt χ_7 auf den unipotenten Klassen $c_{1,0}, c_{1,1}, c_{1,3}$ den Wert $q(q^2-1)(q^3-1)$ an. Die einzigen Charakterwerte von χ_7 , die wir noch nicht kennen, sind also die Werte auf den Klassen $c_{1,4}, c_{1,8}, c_{1,11}$ und $c_{1,13}$. Wegen des Kerns von χ_7 , nimmt χ_7 auf den Klassen $c_{1,4}, c_{1,8}$ und $c_{1,11}$ den gleichen Wert an, den wir mit x bezeichnen wollen. Es sei y , der Wert von χ_7 auf der Klasse $c_{1,13}$. Dann ergeben sich x und y aus den Bedingungen $(\chi_1(0), \chi_7)_Q = (\chi_5(0), \chi_7)_Q = 0$. Damit haben wir alle Charakterwerte von χ_7 bestimmt und kennen somit alle irreduziblen Charaktere von Q , die ψ_2 überlagern.

Wir müssen also nur noch die irreduziblen Charaktere von Q bestimmen, die ψ_3 überlagern. Für $k = 0, \dots, q-2$ werden durch

$$\varphi_k : h(\pi^i, \pi^i) x_\beta(d_1) x_{\alpha+\beta}(d_2) x_{2\alpha+\beta}(d_3) x_{3\alpha+\beta}(d_4) x_{3\alpha+2\beta}(d_5) \mapsto \zeta_1^{ik} \phi(d_2)$$

lineare Charaktere von $\{h(t, t, t, t) \mid t \in \mathbb{F}, t^{q-1} = 1\} X_\beta X_{\alpha+\beta} X_{2\alpha+\beta} X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}$ definiert. Dann ist

$$\chi_{14}(k) := \varphi_k \uparrow^Q \tag{4.20}$$

für $k = 0, \dots, q-2$, $k \neq 0, \frac{q-1}{2}$ ein irreduzibler Charakter von Q , wie man durch Berechnen der Norm bestätigt. Dies liefert $\frac{q-3}{2}$ verschiedene irreduzible Charaktere von Q . An Hand der Charakterwerte von $\chi_{14}(k)$ sieht man, dass $\chi_{14}(k)$ den Normalteiler $X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ im Kern enthält. Also sind die $\frac{q-3}{2}$ verschiedenen irreduziblen Charaktere $\chi_{14}(k)$ irreduzible Charaktere von Q , die ψ_3 überlagern.

Als nächstes überlegen wir uns, dass ψ_3 auf seine Trägheitsgruppe I_3 fortsetzt. Durch

$$\varphi : x_\beta(d_1)x_{\alpha+\beta}(d_2)x_{2\alpha+\beta}(d_3)x_{3\alpha+\beta}(d_4)x_{3\alpha+2\beta}(d_5) \mapsto \phi(d_3)$$

wird ein linearer Charakter von $X_\beta X_{\alpha+\beta} X_{2\alpha+\beta} X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}$ definiert. Durch Nachrechnen sieht man, dass $\varphi \uparrow^U$ eine Fortsetzung von ψ_3 auf U ist. Aus Corollary (8.16) und Corollary (11.31) in Isaacs [30] folgt nun die Fortsetzbarkeit von ψ_3 auf I_3 . Gemäß Satz 4.1.2 und Satz 4.1.5 gibt es also eine Bijektion zwischen den irreduziblen Charakteren der Trägheitsfaktorgruppe $\bar{I}_3$ und den irreduziblen Charakteren von Q , die ψ_3 überlagern. Die Charaktertafel von $\bar{I}_3$ ist die gleiche wie die Charaktertafel von $SL_2(q)$ und lässt sich wie in Schur [37], Seite 127ff, berechnen. Damit erhalten wir bereits eine Klassifikation der irreduziblen Charaktere von Q , die ψ_3 überlagern: ein irreduzibler Charakter χ_8 vom Grad $q^3(q^3 - 1)$, ein irreduzibler Charakter χ_9 vom Grad $q^4(q^3 - 1)$, zwei irreduzible Charaktere χ_{10} bzw. χ_{11} vom Grad $\frac{1}{2}q^3(q^3 - 1)(q + 1)$, zwei irreduzible Charaktere χ_{12} bzw. χ_{13} vom Grad $\frac{1}{2}q^3(q^3 - 1)(q - 1)$, ferner $\frac{q-3}{2}$ irreduzible Charaktere $\chi_{14}(k)$ vom Grad $q^3(q^3 - 1)(q + 1)$ und $\frac{q-1}{2}$ irreduzible Charaktere $\chi_{15}(k)$ vom Grad $q^3(q^3 - 1)(q - 1)$. Die irreduziblen Charaktere χ_{14} haben wir bereits oben in (4.20) explizit berechnet. Die Charaktere $\chi_{14}(0)$ und $\chi_{14}(\frac{q-1}{2})$ haben die Norm 2. Mit Hilfe von Satz 4.1.2, Satz 4.1.5, unserer Kenntnis der Charaktertafel von $\bar{I}_3$, den Orthogonalitätsrelationen der Charaktertafel von Q sowie den Bedingungen:

$$\begin{aligned} \chi_{14}(0) &= \chi_{10} + \chi_{11}, \\ \chi_{14}\left(\frac{q-1}{2}\right) &= \chi_8 + \chi_9, \end{aligned}$$

lassen sich dann χ_8 , χ_9 , χ_{10} und χ_{11} explizit ausrechnen. Die irreduziblen Charaktere $\chi_{15}(k)$ ergeben sich dann durch

$$\chi_{15}(k) = \chi_4(k) \cdot \chi_8$$

für $k = 0, \dots, q$, $k \neq 0, \frac{q+1}{2}$. Damit haben wir nun alle irreduziblen Charaktere von Q , die $X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ im Kern enthalten, bis auf zwei explizit bestimmt. Die beiden noch fehlenden irreduziblen Charaktere χ_{12} und χ_{13} sind Konstituenten des Norm-2-Charakters $\chi_{15}\left(\frac{q+1}{2}\right)$. Fassen wir die Charaktere von Q , die $X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ im Kern enthalten, als Charaktere der Faktorgruppe $\bar{Q} := Q/X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ auf, so ergeben sich die noch fehlenden beiden Charaktere χ_{12} und χ_{13} mit Hilfe von Satz 4.1.2, Satz 4.1.5, unserer Kenntnis

der Charaktertafel von $\bar{I}_3$ und der Bedingung

$$\chi_{15} \left(\frac{q+1}{2} \right) = \chi_{12} + \chi_{13}$$

aus den Zeilen- und Spaltenorthogonalitätsrelationen der Charaktertafel von $\bar{Q}$. Damit haben wir auch alle irreduziblen Charaktere von Q bestimmt, die ψ_3 überlagern. Insgesamt haben wir nun also alle irreduziblen Charaktere von Q gefunden, die $X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ im Kern enthalten. ■

4.11.2 Bemerkung

Wir haben nun alle irreduziblen Charaktere von Q bestimmt, außer denjenigen, die nichttrivial auf $Z(U_Q)$ einschränken. Die Bestimmung dieser Charaktere scheint deutlich schwieriger zu sein und ist bislang nicht gelungen. Dies hat mehrere Gründe. Zum einen haben wir bei der Konstruktion der Charaktertafel von P den wichtigsten irreduziblen Charakter von P , der nichttrivial auf $Z(U_P)$ einschränkt, nämlich den zum trivialen Charakter von $\bar{I}_5$ korrespondierenden irreduziblen Charakter χ_{15} , durch Zerlegung der Einschränkung der unipotenten Charaktere von $G = {}^3D_4(q)$ gewonnen (vergleiche die Konstruktion von χ_{15} in Abschnitt 4.10). Dies ist bei Q nicht möglich. Zum anderen sind nicht alle irreduziblen Charaktere des unipotenten Radikals U_Q explizit bekannt, die nichttrivial auf $Z(U_Q)$ einschränken (vergleiche Bemerkung 4.7.1). Man kann zeigen, dass die Anzahl dieser irreduziblen Charaktere von U_Q gleich $q^3(q^2 - 1)$ ist. Hieraus folgt insbesondere, dass die Operation des Levi-Komplements auf diesen irreduziblen Charakteren von U_Q , die nichttrivial auf $Z(U_Q)$ einschränken, in mehr als eine Bahn zerfällt. Damit liegen die Verhältnisse deutlich anders als bei P . Hinzu kommt, dass man beweisen kann, dass die irreduziblen Charaktere von U_Q , die nichttrivial auf $Z(U_Q)$ einschränken, alle den gleichen Grad haben. Die explizite Bestimmung eines Vertretersystems für die Bahnen des Levi-Komplements L_Q auf den irreduziblen Charakteren von U_Q , die nichttrivial auf $Z(U_Q)$ einschränken, dürfte daher schwierig sein.

4.12 Charaktere eines Zentralisators

Wir behalten die Bezeichnungen aus Kapitel 2 bei. Insbesondere sei $G = {}^3D_4(q)$, wobei wir die Voraussetzung beibehalten, dass q ungerade ist. Wie schon in Abschnitt 3.7 betrachten wir die zyklische Untergruppe D von P , die von einem Element $h := h(t, 1, t^q, t^{q^2})$ mit $t \in \mathbb{F}$, $t^{q^2+q+1} = 1$, $t \neq 1$ erzeugt wird. In diesem Abschnitt berechnen wir drei Charaktere des Zentralisators $C_P(D)$: zwei irreduzible Charaktere $_{C_P(D)}\chi_1$ und $_{C_P(D)}\chi_2$ sowie den Permutationscharakter $\mathbf{1}_{TX_{3\alpha+\beta}} \uparrow^{C_P(D)}$. Wir werden in Kapitel 6 auf diese Charaktere zurückgreifen.

Die beiden irreduziblen Charaktere definieren wir wie folgt: Es sei $\phi : \mathbb{F}_q \rightarrow \mathbb{C}^\times$ ein beliebiger nichttrivialer linearer Charakter der additiven Gruppe von $\mathbb{F}_q$. Mit T bezeichnen wir wieder den maximalen Torus $T = \{h(t_1, t_2) \mid t_1, t_2 \in \mathbb{F}, t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1\}$, wobei wir wieder die Abkürzung $h(t_1, t_2) := h(t_1, t_2, t_1^q, t_2^q)$ benutzen.

${}_{C_P(D)}\chi_1$:

Es ist $C_T(X_{3\alpha+2\beta}) = \{h(t, 1) \mid t \in \mathbb{F}_{q^3}^\times\}$. Daher ist

$$\varphi : h(t, 1)x_{3\alpha+\beta}(d_1)x_{3\alpha+2\beta}(d_2) \mapsto \phi(d_2)$$

ein linearer Charakter von $H := C_T(X_{3\alpha+2\beta})X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$. Wir definieren

$${}_{C_P(D)}\chi_1 := \varphi \uparrow^{C_P(D)}.$$

${}_{C_P(D)}\chi_2$:

Es ist $C_T(X_\beta) = \{h(t^2, t^{q^2+q+1}) \mid t \in \mathbb{F}_{q^3}^\times\}$. Daher ist

$$\varphi : h(t^2, t^{q^2+q+1})x_\beta(d_1)x_{3\alpha+\beta}(d_2)x_{3\alpha+2\beta}(d_3) \mapsto \phi(d_1)$$

ein Charakter von $H := C_T(X_\beta)X_\beta X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$. Wir setzen ${}_{C_P(D)}\chi_2 := \varphi \uparrow^{C_P(D)}$.

Die Werte der drei Charaktere ${}_{C_P(D)}\chi_1$, ${}_{C_P(D)}\chi_2$ und $\mathbf{1}_{TX_{3\alpha+\beta}} \uparrow^{C_P(D)}$ von $C_P(D)$ sind in Tabelle A.49 aufgeführt. Die Berechnung dieser Charakterwerte verläuft analog zur Berechnung der Charaktere der Boreluntergruppe B in Abschnitt 4.5. Da diese Rechnungen sogar deutlich einfacher als die in Abschnitt 4.5 sind, verzichten wir hier auf die Details der einzelnen Rechenschritte. Durch Ausrechnen von Skalarprodukten mit Hilfe der Tabelle A.49 weist man auch die Irreduzibilität von ${}_{C_P(D)}\chi_1$ und ${}_{C_P(D)}\chi_2$ nach und erhält außerdem:

$$\mathbf{1}_{TX_{3\alpha+\beta}} \uparrow^{C_P(D)} = \mathbf{1}_{C_P(D)} + {}_{C_P(D)}\chi_1 + {}_{C_P(D)}\chi_2. \quad (4.21)$$

Kapitel 5

Modulare Darstellungstheorie parabolischer Untergruppen

Während in den letzten Kapiteln die gewöhnliche Darstellungstheorie verschiedener parabolischer Untergruppen von $G = {}^3D_4(q)$ im Mittelpunkt stand, soll in den nächsten beiden Kapiteln die modulare Darstellungstheorie einiger parabolischer Untergruppen untersucht werden. Wir beschäftigen uns hierbei mit der ℓ -modularen Darstellungstheorie (ℓ Primzahl) in nichtdefinierender Charakteristik, d.h. wir verlangen, dass ℓ und q teilerfremd sind. Hauptziel der nächsten beiden Kapitel sind Beweise neuer Aussagen über die Zerlegungszahlen von ${}^3D_4(q)$.

Auch in diesem Kapitel setzen wir die Primzahlpotenz q als ungerade voraus. Die ℓ -modularen Zerlegungszahlen von ${}^3D_4(q)$ hängen von der multiplikativen Ordnung von q modulo ℓ ab, die wir hier mit e bezeichnen wollen. Teilt ℓ die Gruppenordnung $|{}^3D_4(q)|$ nicht, so liefert die ℓ -modulare Darstellungstheorie von ${}^3D_4(q)$ „im Wesentlichen“ die gleichen Ergebnisse wie die gewöhnliche Darstellungstheorie. Wir gehen daher davon aus, dass ℓ ein Teiler der Gruppenordnung

$$|{}^3D_4(q)| = q^{12}(q^8 + q^4 + 1)(q^6 - 1)(q^2 - 1) = q^{12} \phi_{12} \phi_6^2 \phi_3^2 \phi_2^2 \phi_1^2$$

ist, wobei ϕ_i das i -te Kreisteilungspolynom in der Variablen q bezeichne. Somit ist die multiplikative Ordnung e von q modulo ℓ gleich 12, 6, 3, 2 oder 1. Für $e = 12$ sind sämtliche Zerlegungszahlen seit Geck [19] bekannt.

In den anderen Fällen sind noch einige Zerlegungszahlen von ${}^3D_4(q)$ unbekannt. Wir werden in Kapitel 6 neue Ergebnisse über die Zerlegungszahlen von ${}^3D_4(q)$ in den beiden Fällen $e = 6$ und $e = 3$ beweisen. Bei den Beweisen werden wir uns in entscheidender Weise auf Kenntnisse über die ℓ -modulare Darstellungstheorie der maximalen parabolischen Un-

tergruppe P stützen. Diese Informationen über die ℓ -modulare Darstellungstheorie von P sollen in diesem Kapitel bereitgestellt werden.

Im Einzelnen werden wir im Fall $e = 3$ einen ℓ -Block von P bestimmen, d.h. wir geben die irreduziblen Charaktere von P an, die in diesem Block liegen, und bestimmen den Brauerbaum, die Zerlegungsmatrix sowie die Loewy-Struktur der unzerlegbaren Moduln dieses Blocks. Darüber hinaus bestimmen wir auch den Hauptblock der anderen maximalen parabolischen Untergruppe Q . Wesentliche Hilfsmittel, die wir dabei benutzen, sind die Clifford-Theorie für Blöcke, Fong-Reduktion und die Brauer-Dade-Theorie für Blöcke mit zyklischem Defekt.

5.1 Hilfsmittel aus der modularen Darstellungstheorie

In diesem Abschnitt stellen wir einige Hilfsmittel aus der modularen Darstellungstheorie zusammen, die wir im weiteren Verlauf der Arbeit benötigen werden. Wir weichen in diesem Abschnitt ausnahmsweise von der in den anderen Abschnitten benutzten Notation ab. In diesem Abschnitt ist G stets eine beliebige endliche Gruppe. (Erst im nächsten Abschnitt 5.2 werden wir zu unserer üblichen Notation zurückkehren. Dort bezeichnet G dann wieder die Steinbergschen Trialitätsgruppen.)

Im ganzen Abschnitt 5.1 sei also G eine beliebige endliche Gruppe, ℓ eine Primzahl und (K, R, k) ein ℓ -modulares Zerfällungssystem für alle Untergruppen von G . Es sei ferner π ein Erzeuger des maximalen Ideals von R . Wenn wir von Blöcken, Brauer-Charakteren, projektiven Charakteren oder Zerlegungsmatrizen reden, so beziehen wir dies stets auf dieses ℓ -modulare System. Die Menge der irreduziblen gewöhnlichen Charaktere in einem Block B bezeichnen wir mit $\text{Irr}(B)$. Unter einer ℓ' -Untergruppe von G verstehen wir eine Untergruppe von G , deren Ordnung nicht von ℓ geteilt wird.

Wir stellen zunächst einige Begriffe und Lemmata aus der Clifford-Theorie für Blöcke bereit.

5.1.1 Definition

Es sei H ein Normalteiler von G , ferner seien b ein Block von H und B ein Block von G .

- (a) Wir sagen B überlagert b , falls ein irreduzibler gewöhnlicher Charakter χ in B existiert, dessen Einschränkung auf H einen irreduziblen gewöhnlichen Konstituenten χ' in b besitzt.
- (b) G operiert auf den Blöcken b von H per Konjugation: Für $g \in G$ definieren wir ${}^g b$ durch $\text{Irr}({}^g b) := \{{}^g \chi \mid \chi \in \text{Irr}(b)\}$ (vergleiche Feit [16], Seite 195). Die Untergruppe $I(b) := \{g \in G \mid {}^g b = b\}$ heißt die Trägheitsgruppe von b .

5.1.2 Lemma

Es sei H ein Normalteiler von G , ferner seien b ein Block von H und B ein Block von G . Dann gilt:

- (a) Es gibt einen Block von G , der b überlagert.
- (b) Wird b von B überlagert, so besitzt jeder irreduzible gewöhnliche Charakter χ in B bei Einschränkung auf H einen Konstituenten in b .
- (c) Die Blöcke von H , die von B überlagert werden, bilden eine Bahn unter Konjugation in G .

Beweis: Dies folgt aus Lemma 4.2.7 und Lemma 4.2.8 in Hiss und Lux [25]. ■

Wir wollen nun noch den Spezialfall betrachten, dass H ein ℓ' -Normalteiler von G ist. In dieser Situation enthält jeder ℓ -Block von H genau einen gewöhnlichen irreduziblen Charakter. Wir wollen Definition 5.1.1 und Lemma 5.1.2 noch an diesen Spezialfall anpassen.

5.1.3 Definition

Es sei H ein ℓ' -Normalteiler von G . Es seien ferner $\psi \in \text{Irr}(H)$ und B ein Block von G . Wir sagen B überlagert ψ , falls ein irreduzibler gewöhnlicher Charakter $\chi \in \text{Irr}(B)$ mit $(\chi \downarrow_H, \psi)_H \neq 0$ existiert.

5.1.4 Lemma

Es sei H ein ℓ' -Normalteiler von G , ferner seien ψ ein irreduzibler gewöhnlicher Charakter von H und B ein Block von G . Dann gilt:

- (a) Es gibt einen Block von G , der ψ überlagert.
- (b) Wird ψ von B überlagert, so gilt $(\chi \downarrow_H, \psi)_H \neq 0$ für jeden irreduziblen gewöhnlichen Charakter χ in B .
- (c) Die irreduziblen gewöhnlichen Charaktere von H , die von B überlagert werden, bilden eine Bahn unter Konjugation in G .

Beweis: Dies folgt aus Definition 5.1.3 und Lemma 5.1.2. ■

Die folgenden drei Sätze werden manchmal auch als Fong-Reduktion bezeichnet. Satz 5.1.5 zeigt, dass man die Blöcke von G bestimmen kann, sobald man gewisse Blöcke der Trägheitsgruppen von Blöcken eines Normalteilers H kennt.

5.1.5 Satz

Es sei H ein Normalteiler von G und b ein Block von H . Die Brauer-Korrespondenz $\hat{B} \mapsto \hat{B}^G$ definiert eine Bijektion zwischen den Blöcken $\hat{B}$ von $I(b)$, die b überlagern, und den Blöcken von G , die b überlagern. Ist $\hat{B}$ ein Block von $I(b)$, der b überlagert, so gilt:

- (a) Die Induktion von Charakteren $\chi \mapsto \chi \uparrow^G$ definiert eine Bijektion zwischen den irreduziblen gewöhnlichen Charakteren in $\hat{B}$ und den irreduziblen gewöhnlichen Charakteren in $\hat{B}^G$.
- (b) Die Induktion $\varphi \mapsto \varphi \uparrow^G$ definiert eine Bijektion zwischen den irreduziblen Brauer-Charakteren in $\hat{B}$ und $\hat{B}^G$.
- (c) $\hat{B}$ und $\hat{B}^G$ haben die gleiche Zerlegungsmatrix (bezüglich der durch (a) und (b) gegebenen Korrespondenzen).

- (d) $\hat{B}$ und $\hat{B}^G$ besitzen eine gemeinsame Defektgruppe.
- (e) b ist der einzige Block von H , der von $\hat{B}$ überlagert wird.

Beweis: Siehe Hiss und Lux [25], Theorem 4.2.10. ■

Wir wollen auch Satz 5.1.5 noch einmal gesondert für den Spezialfall formulieren, dass H ein ℓ' -Normalteiler von G ist. Der folgende Satz ist eine Umformulierung von Theorem (2B) in Fong [17].

5.1.6 Satz

Es sei H ein ℓ' -Normalteiler von G und ψ ein irreduzibler gewöhnlicher Charakter von H . Es bezeichne $I(\psi)$ die Trägheitsgruppe von ψ in G . Die Brauer-Korrespondenz $\hat{B} \mapsto \hat{B}^G$ definiert eine Bijektion zwischen den Blöcken $\hat{B}$ von $I(\psi)$, die ψ überlagern, und den Blöcken von G , die ψ überlagern. Ist $\hat{B}$ ein Block von $I(b)$, der ψ überlagert, so gilt:

- (a) Die Induktion von Charakteren $\chi \mapsto \chi \uparrow^G$ definiert eine Bijektion zwischen den irreduziblen gewöhnlichen Charakteren in $\hat{B}$ und den irreduziblen gewöhnlichen Charakteren in $\hat{B}^G$.
- (b) Die Induktion $\varphi \mapsto \varphi \uparrow^G$ definiert eine Bijektion zwischen den irreduziblen Brauer-Charakteren in $\hat{B}$ und $\hat{B}^G$.
- (c) $\hat{B}$ und $\hat{B}^G$ haben die gleiche Zerlegungsmatrix (bezüglich der durch (a) und (b) gegebenen Korrespondenzen).
- (d) $\hat{B}$ und $\hat{B}^G$ besitzen eine gemeinsame Defektgruppe.
- (e) ψ ist der einzige irreduzible gewöhnliche Charakter von H , der von $\hat{B}$ überlagert wird.

Beweis: Dies folgt aus Satz 5.1.5, wenn man beachtet, dass jeder Block von H genau einen irreduziblen gewöhnlichen Charakter enthält und somit die Trägheitsgruppe dieses Blockes mit der Trägheitsgruppe dieses Charakters übereinstimmt. ■

Es seien H ein ℓ' -Normalteiler von G und $\{\psi_0, \dots, \psi_k\}$ ein Vertretersystem für die G -Konjugiertenklassen der irreduziblen gewöhnlichen Charaktere von H . Mit I_j sei die Trägheitsgruppe von ψ_j in G bezeichnet ($j = 0, \dots, k$). Nach Satz 4.1.3 und Lemma 5.1.4 bilden dann die Mengen

$$B_j := \{\chi \in \text{Irr}(G) \mid \chi \text{ überlagert } \psi_j\}, \quad (5.1)$$

$j = 0, \dots, k$ eine Partition von $\text{Irr}(G)$, und jedes B_j ist eine Vereinigung von Blöcken. Satz 5.1.6 führt nun die Bestimmung der Blöcke in B_j mitsamt ihren Defektgruppen und

Zerlegungsmatrizen auf die Bestimmung der Blöcke (mit Defektgruppen und Zerlegungsmatrizen) von I_j zurück, die ψ_j überlagern. Die Bestimmung der Blöcke von I_j , die ψ_j überlagern, wird – unter Zusatzvoraussetzungen – durch den folgenden Satz ermöglicht. Zur Definition von $\chi \ltimes \psi$ vergleiche man Abschnitt 4.1.

5.1.7 Satz

Es sei die Gruppe G ein semidirektes Produkt $G = K \ltimes H$ aus einer Untergruppe K und einem ℓ' -Normalteiler H . Es sei ferner ψ ein irreduzibler gewöhnlicher Charakter von G , dessen Einschränkung auf H (die wir ebenfalls mit ψ bezeichnen) irreduzibel ist. Jedem Block $\bar{B}$ von K ordnen wir einen Block B von G folgendermaßen zu: Wir wählen $\chi \in \text{Irr}(\bar{B})$ und definieren B als den Block von G , der $\chi \ltimes \psi$ enthält. Dann wird ψ_H von B überlagert, und B hängt nicht von der Wahl von $\chi \in \text{Irr}(\bar{B})$ ab. Die somit wohldefinierte Abbildung $\bar{B} \mapsto B$ von der Menge der Blöcke von K in die Menge der Blöcke von G , die ψ_H überdecken, ist eine Bijektion. Ist $\bar{B}$ ein Block von K und B der zugehörige Block von G , so gilt:

- (a) Die Abbildung $\chi \mapsto \chi \ltimes \psi$ definiert eine Bijektion zwischen den irreduziblen gewöhnlichen Charakteren von $\bar{B}$ und den irreduziblen gewöhnlichen Charakteren von B .
- (b) Es gibt eine Bijektion zwischen den irreduziblen Brauer-Charakteren in $\bar{B}$ und B .
- (c) $\bar{B}$ und B haben die gleiche Zerlegungsmatrix (bezüglich der durch (a) und (b) gegebenen Korrespondenzen).
- (d) $\bar{B}$ und B besitzen eine gemeinsame Defektgruppe.
- (e) ψ ist der einzige irreduzible gewöhnliche Charakter von H , der von B überlagert wird.

Beweis: Dies folgt aus dem Beweis von Theorem (2D) in Fong [17]. ■

Jede der vor Satz 5.1.7 erwähnten Trägheitsgruppen I_j enthält offensichtlich den Normalteiler H . Besitzt H in I_j ein Komplement und lässt sich ψ_j auf I_j fortsetzen, so können wir Satz 5.1.7 auf I_j und ψ_j anwenden. Satz 5.1.7 führt dann die Bestimmung der Blöcke von I_j , die ψ_j überlagern, mitsamt Zerlegungsmatrizen und Defektgruppen auf die Bestimmung der Blöcke (mit Zerlegungsmatrizen und Defektgruppen) der Trägheitsfaktorgruppe $\bar{I}_j = I_j/H$ zurück.

Das nächste Lemma ist ein Standardkriterium zur Bestimmung von Blöcken:

5.1.8 Lemma

Zwei irreduzible gewöhnliche Charaktere $\chi, \chi' \in \text{Irr}(G)$ liegen genau dann im gleichen ℓ -Block von G , wenn

$$|g^G| \frac{\chi(g)}{\chi(1)} \equiv |g^G| \frac{\chi'(g)}{\chi'(1)} \text{ modulo } (\ell)$$

im Ring der ganzen algebraischen Zahlen für alle ℓ' -Elemente g von G gilt.

Beweis: Siehe Goldschmidt [22], (7.10). ■

Über den Hauptblock einer endlichen Gruppe halten wir noch Folgendes fest:

5.1.9 Lemma

G besitzt ein normales ℓ -Komplement genau dann, wenn der triviale Charakter der einzige irreduzible Brauer-Charakter im Hauptblock ist.

Beweis: Siehe Feit [16], Lemma IV.4.12, (iv). ■

Als nächstes geben wir noch zwei Resultate aus der Brauer-Dade-Theorie für Blöcke mit zyklischem Defekt an, die für uns in den folgenden Abschnitten von Nutzen sein werden.

5.1.10 Satz

Es sei B ein Block von G mit zyklischer Defektgruppe D der Ordnung ℓ^d . Es seien $\phi_1, \dots, \phi_e$ die irreduziblen Brauer-Charaktere in B . Dann gilt $e \mid \ell - 1$, und die Anzahl der irreduziblen gewöhnlichen Charaktere in B ist $e + \frac{\ell^d - 1}{e}$. Die irreduziblen gewöhnlichen Charaktere in B können mit

$$\chi_1, \dots, \chi_e, \chi_\lambda, \quad \lambda \in \Lambda,$$

bezeichnet werden (wobei Λ eine Indexmenge mit $|\Lambda| = \frac{\ell^d - 1}{e}$ ist), so dass Folgendes gilt: Die Charaktere χ_λ , $\lambda \in \Lambda$ schränken alle gleich auf die ℓ -regulären Konjugiertenklassen von G ein, und setzt man

$$\chi_{e+1} := \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda,$$

so lässt sich die Zerlegungsmatrix von B wie folgt beschreiben:

Es sei Φ_i der gewöhnliche Charakter des projektiv unzerlegbaren Moduls P_i zum Brauer-Charakter ϕ_i . Dann gilt:

$$\Phi_i = \chi_{i(1)} + \chi_{i(2)}, \quad i(1) \neq i(2), \quad i(1), i(2) \in \{1, \dots, e+1\}.$$

Beweis: Siehe Theorem 2.1.5 in Hiss und Lux [25]. ■

5.1.11 Lemma

Es sei B ein Block von G mit zyklischer Defektgruppe D und e die Anzahl der irreduziblen Brauer–Charaktere in B . Dann ist e ein Teiler von

$$|N_G(D)/C_G(D)|.$$

Beweis: Dies folgt aus dem Beweis von Proposition (62.35) in Band II von Curtis und Reiner [12]. ■

Wir stellen nun noch einige allgemeine Sätze und Definitionen aus der modularen Darstellungstheorie zusammen, die wir in Kapitel 6 benötigen werden. Die Analoga der folgenden beiden Lemmata in der gewöhnlichen Darstellungstheorie sind wohlbekannt. Da ihre „modularen“ Varianten vielleicht nicht so bekannt sind, geben wir sie hier noch einmal mit Beweisskizzen an.

5.1.12 Lemma

Es sei H eine Normalteiler von G , so dass G/H zyklisch ist, und es sei W ein G –invarianter einfacher kH –Modul. Dann gibt es einen einfachen kG –Modul V mit $V \downarrow_H \cong W$, und es gilt: $W \uparrow^G \cong kG/H \otimes_k V$, wobei der reguläre kG/H –Modul vermöge $G \rightarrow G/H$ als kG –Modul betrachtet wird.

Beweis: Es sei $g \in G$ mit $G/H = \langle gH \rangle$, und es sei $\delta : H \rightarrow GL(W)$ eine Darstellung von H , die den kH –Modul W bewirkt. Da W in G invariant ist, existiert $\psi \in GL(W)$ mit $\delta(g^{-1}hg) = \psi^{-1}\delta(h)\psi$ für alle $h \in H$. Setzen wir $n := |G/H|$, so gilt $g^n \in H$ und damit $\psi^{-n}\delta(h)\psi^n = \delta(g^{-n})\delta(h)\delta(g^n)$. Also ist $\psi^n\delta(g^{-n})$ ein kH –Endomorphismus von W und somit nach dem Lemma von Schur: $\psi^n\delta(g^{-n}) = \alpha \cdot \text{id}_W$ für ein $\alpha \in k^\times$. Da k „hinreichend viele“ Einheitswurzeln enthält, gibt es ein $\gamma \in k^\times$ mit $\gamma^n = \alpha$. Durch Nachrechnen bestätigt man, dass $\delta(g^i h) := \gamma^{-i}\psi^i\delta(h)$ eine Fortsetzung von δ auf G definiert. Der zweite Teil der Behauptung lässt sich wie folgt einsehen: Es sei $\{g_1 = 1, g_2, \dots, g_n\}$ ein Vertretersystem für die Linksnebenklassen von H in G . Dann wird durch

$$\begin{aligned} W \uparrow^G = kG \otimes_{kH} W &\longrightarrow kG/H \otimes_k V, \\ \sum_i g_i \otimes w_i &\mapsto \bar{g}_i \otimes g_i w, \end{aligned}$$

ein Isomorphismus von kG –Moduln definiert (wobei mit $\bar{g}_i$ die Nebenklasse $g_i H$ gemeint ist). ■

5.1.13 Lemma

Es sei H ein Normalteiler von G , W ein einfacher kH –Modul, dessen Trägheitsgruppe in G gleich H ist. Dann ist $W \uparrow^G$ einfach.

Beweis: Es sei V ein einfacher Faktormodul von $W\uparrow^G$. Wegen

$$\{0\} \neq \operatorname{Hom}_{kG}(W\uparrow^G, V) \cong \operatorname{Hom}_{kH}(W, V\downarrow_H)$$

hat $V\downarrow_H$ einen zu W isomorphen Untermodul. Mit W kommen auch sämtliche zu W in G konjugierte Moduln als direkte Summanden von $V\downarrow_H$ vor. Die Anzahl paarweise nichtisomorpher zu W konjugierter kH -Moduln ist gleich dem Index der Trägheitsgruppe von W in G , also gleich dem Index von H in G . Die Dimension von $V\downarrow_H$ ist also mindestens $[G : H] \cdot \dim W = \dim(W\uparrow^G)$. Also ist $V = W\uparrow^G$. ■

5.1.14 Definition

Ein kG -Modul M heißt *liftbar*, wenn es ein RG -Gitter $\widehat{M}$ mit $\widehat{M}/\pi\widehat{M} \cong M$ gibt. Dann heißt $\widehat{M}$ ein *Lift* von M .

5.1.15 Lemma

Es sei H eine Untergruppe von G und k_H der triviale kH -Modul. Es sei ferner

$$k_H\uparrow^G = M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$$

direkte Summe der unzerlegbaren kG -Moduln M_i . Dann gibt es genau ein $i \in \{1, \dots, r\}$, so dass M_i einen zum trivialen Modul isomorphen Faktor besitzt, und genau ein $j \in \{1, \dots, r\}$, so dass M_j einen zum trivialen Modul isomorphen Untermodul besitzt. Es gilt außerdem: $i = j$.

Beweis: Siehe Lemma II.12.7 i) und ii) in Landrock [32]. ■

Der in Lemma 5.1.15 ausgezeichnete direkte Summand von Permutationsmoduln wird manchmal auch *Scott-Modul* genannt. Unter dem Charakter einer RG -Gitters M verstehen wir den Charakter von $K \otimes_R M$.

5.1.16 Lemma (Zassenhaus–Thompson–Lemma)

Es sei M ein RG -Gitter und Φ der Charakter von M . Gilt $\Phi = \chi_1 + \chi_2$ für zwei gewöhnliche Charaktere von G , so gilt: M enthält R -reine Untergitter N_i , so dass χ_i der Charakter von N_i ist ($i = 1, 2$).

Beweis: Siehe Theorem I.17.3 in Landrock [32]. ■

In Kapitel 6 werden wir im Abschnitt 6.4 an entscheidenden Stellen von der Green-Korrespondenz Gebrauch machen. Wir fassen die Resultate aus diesem Umkreis, die wir benötigen werden, in den folgenden Sätzen zusammen.

Ist D eine ℓ -Untergruppe von G , und H eine Untergruppe von G mit $N_G(D) \leq H$, so definieren wir:

$$\mathfrak{X} := \{D^x \cap D \mid x \in G, x \notin H\} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{Y} := \{D^x \cap H \mid x \in G, x \notin H\} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{A} := \{A \leq D \mid A \text{ ist in } G \text{ zu keiner Untergruppe einer Untergruppe aus } \mathfrak{X} \text{ konjugiert}\}.$$

Man beachte, dass stets $D \in \mathfrak{A}$ ist. Mit diesen Bezeichnungen gilt:

5.1.17 Satz („Green-Korrespondenz“)

Es sei D eine ℓ -Untergruppe von G und H eine Untergruppe von G mit $N_G(D) \leq H$. Dann gibt es eine Bijektion zwischen der Menge der Isomorphieklassen unzerlegbarer kG -Moduln mit Vertex in $\mathfrak{A}$ und der Menge der Isomorphieklassen unzerlegbarer kH -Moduln mit Vertex in $\mathfrak{A}$. Ist U ein solcher kG -Modul und V ein solcher kH -Modul, die unter dieser Bijektion zueinander korrespondieren, so haben U und V den gleichen Vertex und es gilt:

$$\begin{aligned} V \uparrow^G &\cong U \oplus X, \\ U \downarrow_H &\cong V \oplus Y, \end{aligned}$$

wobei kein unzerlegbarer direkter Summand von X und kein unzerlegbarer direkter Summand von Y den gleichen Vertex wie U und V hat.

Beweis: Siehe Theorem 1 und die anschließenden Bemerkungen auf Seite 81 in Alperin [1]. ■

Die Bijektion in Satz 5.1.17 wird *Green-Korrespondenz* genannt. V heißt der *Green-Korrespondent* von U , und U heißt der *Green-Korrespondent* von V . Ist U ein kG -Modul und $U \cong U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ eine Zerlegung von U in unzerlegbare direkte Summanden U_i , $i = 1, \dots, r$, so definieren wir die *Vielfachheit* von U_i als die Anzahl aller $j \in \{1, \dots, r\}$ mit $U_j \cong U_i$. In Kapitel 6 werden wir die folgende Variante der Green-Korrespondenz benötigen, die insbesondere ohne die Voraussetzung $N_G(D) \leq H$ auskommt:

5.1.18 Satz

Es seien $D, \tilde{D}$ ℓ -Untergruppen von G mit $D \leq \tilde{D}$, und es sei H eine Untergruppe von G mit $\tilde{D} \leq H$. Es sei ferner für alle $g \in G$ die folgende Bedingung erfüllt:

$$\text{Aus } {}^g D \leq \tilde{D}, \text{ folgt } g \in N_G(D). \quad (5.2)$$

Dann gilt: Ist U ein unzerlegbarer kH -Modul mit Vertex $\tilde{D}$, so induziert die Green-Korrespondenz (Satz 5.1.17) eine vielfachheitserhaltende Bijektion zwischen der Menge der Isomorphieklassen der unzerlegbaren direkten Summanden von $(U \downarrow_{N_H(D)}) \uparrow^{N_G(D)}$ mit Vertex D und der Menge der Isomorphieklassen der unzerlegbaren direkten Summanden von $U \uparrow^G$ mit Vertex D .

Satz 5.1.18 konnte ich zwar in dieser Form nicht in der Literatur finden, er ist aber vermutlich allgemein bekannt. Der hier gegebene Beweis von Satz 5.1.18 ist im Wesentlichen nur eine Nachahmung des Beweises von Theorem 4.2 in Burry [5].

Beweis (von Satz 5.1.18): Die Green-Korrespondenz Satz 5.1.17 induziert eine vielfachheitserhaltende Bijektion zwischen der Menge der Isomorphieklassen der unzerlegbaren direkten Summanden von $U \uparrow^G$ mit Vertex D und der Menge der Isomorphieklassen der unzerlegbaren direkten Summanden von $(U \uparrow^G) \downarrow_{N_G(D)}$ mit Vertex D .

Nach dem Satz von Mackey gilt:

$$(U \uparrow^G) \downarrow_{N_G(D)} \cong \bigoplus_{g \in N_G(D) \backslash G/H} (({}^g U) \downarrow_{N_G(D) \cap {}^g H}) \uparrow^{N_G(D)}, \quad (5.3)$$

wobei g ein Vertretersystem der $N_G(D)$ - H -Doppelnebenklassen von G durchläuft (als Vertreter der Doppelnebenklasse $N_G(D)H$ wählen wir das Einselement von G). Angenommen, $(({}^g U) \downarrow_{N_G(D) \cap {}^g H}) \uparrow^{N_G(D)}$ besäße einen unzerlegbaren direkten Summanden V mit Vertex D . Nach dem bekannten Verhalten von Vertizes unter Induktion (siehe etwa Theorem 1 in Burry [4]) ist dann D in $N_G(D)$ konjugiert zu einer Untergruppe eines Vertex Q eines unzerlegbaren direkten Summanden von $({}^g U) \downarrow_{N_G(D) \cap {}^g H}$. Also ist D sogar eine Untergruppe von Q . Da ${}^g U$ den Vertex ${}^g \tilde{D}$ hat, ist dann nach dem bekannten Verhalten von Vertizes unter Restriktion Q in ${}^g H$ konjugiert zu einer Untergruppe von ${}^g \tilde{D}$. Es existiert somit ein $h \in H$, so dass ${}^g h D ({}^g h)^{-1} \leq {}^g \tilde{D} g^{-1}$ ist. Aus Voraussetzung (5.2) folgt nun $h g^{-1} \in N_G(D)$, also $g \in N_G(D)H$. Der einzige direkte Summand in (5.3), der unzerlegbare direkte Summanden mit Vertex D besitzt, ist also der mit $g = 1$. Hieraus folgt die Behauptung. ■

Wir halten zwei Spezialfälle, in denen (5.2) erfüllt ist, in einer Bemerkung fest:

5.1.19 Bemerkung

Jede der beiden folgenden Bedingungen impliziert die Voraussetzung (5.2) aus Satz 5.1.18:

- (a) $D = \tilde{D}$ (dies ist der Fall, der von Burry und Carlson in Theorem 4.2 in [5] behandelt wird),
- (b) $\tilde{D}$ ist eine TI -Untergruppe von G , und D ist eine charakteristische Untergruppe von $\tilde{D}$.

Für eine Untergruppe H von G bezeichnen wir mit k_H den trivialen kH -Modul. Das folgende Korollar werden wir in Abschnitt 6.4 benutzen:

5.1.20 Korollar

Es sei D eine zyklische ℓ -Sylowgruppe von G , die eine TI -Untergruppe von G ist, und jede nichttriviale Untergruppe von D besitze in G den gleichen Normalisator wie D . Dann gilt

für jede Untergruppe H von G mit $D \leq H$: Die Green–Korrespondenz Satz 5.1.17 induziert eine vielfachheitserhaltende Bijektion zwischen der Menge der Isomorphieklassen der nichtprojektiven unzerlegbaren direkten Summanden von $k_H \uparrow^G$ und der Menge der Isomorphieklassen der nichtprojektiven unzerlegbaren direkten Summanden von $k_{N_H(D)} \uparrow^{N_G(D)}$.

Beweis: Dies folgt aus Satz 5.1.18 und Bemerkung 5.1.19. ■

Ist D eine ℓ –Untergruppe von G , so definiert die Brauer–Korrespondenz eine Bijektion zwischen den Blöcken von G mit Defektgruppe D und den Blöcken von $N_G(D)$ mit Defektgruppe D , indem sie jedem solchen Block b von $N_G(D)$ seinen Brauer–Korrespondenten b^G zuordnet. Der folgende Satz zeigt, dass die Green– mit der Brauer–Korrespondenz verträglich ist.

5.1.21 Satz

Es sei B ein Block von G mit Defektgruppe D und b sein Brauer–Korrespondent in $N_G(D)$, das heißt $b^G = B$. Ist U ein unzerlegbarer kG –Modul in B mit Vertex in $\mathfrak{A}$, so liegt der Green–Korrespondent (im Sinne von Satz 5.1.17) im Block b von $N_G(D)$.

Beweis: Siehe Theorem 7.8 in Feit [16], Seite 131. ■

Während in den vorangegangenen Definitionen und Sätzen die Gruppe G stets eine beliebige endliche Gruppe war, setzen die folgende Definition und der folgende Satz die speziellere Situation voraus, dass G eine Gruppe mit zerfallendem BN –Paar der Charakteristik p ist, die die Kommutatorrelationen erfüllt (vergleiche Kapitel 2 in Carter [7]).

5.1.22 Definition (Harish–Chandra–Moduln)

Es sei G eine endliche Gruppe mit zerfallendem BN –Paar der Charakteristik p , die die Kommutatorrelationen erfüllt (vergleiche Kapitel 2 in Carter [7]), und $\ell \neq p$. Es sei ferner W die Weyl–Gruppe von G mit Standarderzeugern $S = \{s_i \mid i \in I\}$. Für Teilmengen $J \subseteq I$ sei L_J die zugehörige Standard–Levi–Untergruppe von G . Die Untergruppen der Form $nL_J n^{-1}$ ($n \in N$) von G heißen *Levi–Untergruppen* von G . Mit R_L^G bzw. $*R_L^G$ bezeichnen wir die Harish–Chandra–Induktion bzw. Harish–Chandra–Restriktion (vergleiche (2.2) in Geck und Hiss [20]). Ein kG –Modul Y heißt *kuspidal*, wenn $*R_L^G(Y) = 0$ ist für alle echten Levi–Untergruppen von G . Ein kG –Modul Y heißt ein *Harish–Chandra–Modul* von G , wenn er ein unzerlegbarer direkter Summand von $R_L^G(X)$ für eine Levi–Untergruppe L von G und einen kusalen, einfachen kL –Modul X ist.

5.1.23 Proposition

Es sei G eine Gruppe mit zerfallendem BN –Paar der Charakteristik p , die die Kommutatorrelationen erfüllt, und $\ell \neq p$. Ist Y ein Harish–Chandra–Modul von G , so sind sein Kopf und sein Sockel einfach und zueinander isomorph.

Beweis: Siehe Proposition 2.11 in Geck und Hiss [20]. ■

5.2 Blöcke der parabolischen Untergruppe P

In diesem Abschnitt kehren wir zur Notation aus den Kapiteln 2 bis 4 zurück. Es sei also q eine Potenz der Primzahl p , wobei wir p wieder als ungerade voraussetzen. Die Steinbergschen Trialitätsgruppen bezeichnen wir wieder mit $G = {}^3D_4(q)$. Es sei ferner P die bereits in Abschnitt 3.5 definierte maximale parabolische Untergruppe von G mit unipotentem Radikal U_P und Levi-Komplement L_P .

Es sei ℓ eine von p verschiedene Primzahl und (K, R, k) ein ℓ -modulares Zerfallungssystem für alle Untergruppen von G . Wenn wir von Blöcken, Brauer-Charakteren, projektiven Charakteren oder Zerlegungsmatrizen reden, so beziehen wir dies stets auf dieses ℓ -modulare System. Mit e bezeichnen wir die multiplikative Ordnung von q modulo ℓ .

Wegen $\ell \nmid q$ ist das unipotente Radikal ein ℓ' -Normalteiler von P . Es sei $\{\psi_0, \dots, \psi_5\}$ das Vertretersystem der P -Konjugiertenklassen der irreduziblen gewöhnlichen Charaktere, das wir schon in Abschnitt 4.10 gewählt haben, und es seien $I_0, \dots, I_5$ die zugehörigen Trägheitsgruppen in P . Nach Satz 4.1.3 und Lemma 5.1.4 bilden die Mengen

$$B_j := \{\chi \in \text{Irr}(P) \mid \chi \text{ überlagert } \psi_j\},$$

$j = 0, \dots, 5$ eine Partition von $\text{Irr}(P)$, und jedes B_j ist eine Vereinigung von Blöcken. Mit $\bar{I}_j$, $j = 0, \dots, 5$ bezeichnen wir die Trägheitsfaktorgruppen, die wir auf Grund der Levi-Zerlegung wie schon in Abschnitt 4.8 mit $I_j \cap L_P$ identifizieren. Durch Satz 5.1.6 wird die Bestimmung der Blöcke in B_j mitsamt ihren Defektgruppen und Zerlegungsmatrizen auf die Bestimmung der Blöcke (mit Defektgruppen und Zerlegungsmatrizen) von I_j zurückgeführt, die ψ_j überlagern. Wegen des Zusatzes zu Satz 4.10.1 können wir auf die Trägheitsgruppen I_j Satz 5.1.7 anwenden. Damit ist die Bestimmung der Blöcke von P in B_j (mitsamt ihrer Zerlegungsmatrizen und Trägheitsgruppen) vollständig auf die Bestimmung der Blöcke (mit Zerlegungsmatrizen und Trägheitsgruppen) der Trägheitsfaktorgruppen $\bar{I}_j$ zurückgeführt.

Der Fall $e = 3$

Die Annahme $e = 3$, dass also die multiplikative Ordnung von q modulo ℓ gleich 3 ist, ist äquivalent zu $\ell > 3$ und $\ell \mid q^2 + q + 1$.

In diesem Fall lassen sich mit Hilfe der Fong-Reduktion (Satz 5.1.6 und Satz 5.1.7) sowie der Brauer-Dade-Theorie sämtliche ℓ -Blöcke von P mitsamt ihren Zerlegungsmatrizen und Defektgruppen berechnen. Da wir in Kapitel 6 nur einen dieser Blöcke benötigen werden, beschränken wir uns hier auf die Bestimmung dieses einen Blockes.

Es sei also nun $\ell > 3$ und $\ell \mid q^2 + q + 1$. Wir definieren $f, m \in \mathbb{N}$ durch

$$\ell^f \parallel q^2 + q + 1 \text{ und } m := \frac{q^3 - 1}{\ell^f}.$$

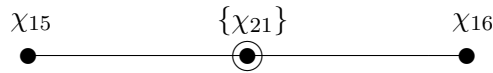
Wegen Tabelle A.47 und den Vorbemerkungen zu Beginn dieses Abschnitts ist

$$\begin{aligned} B_5 = \{\chi_{15}, \dots, \chi_{20}\} \cup & \{\chi_{21}(k) \mid k = 1, \dots, q^3 - 2, k \neq (q^3 - 1)/2\} \\ & \cup \{\chi_{22}(k) \mid k = 1, \dots, q^3, k \neq (q^3 + 1)/2\} \end{aligned}$$

eine Vereinigung von ℓ -Blöcken von P , und diese ℓ -Blöcke stehen vermöge der Fong-Reduktion (Satz 5.1.6 und Satz 5.1.7) in Bijektion zu den ℓ -Blöcken von $\bar{I}_5$. Wir interessieren uns nun für den ℓ -Block von P in B_5 , der zum Hauptblock von $\bar{I}_5$ korrespondiert. Diesen Block von P wollen wir mit $b_{15,16,21}$ bezeichnen.

Wir behaupten: Die irreduziblen gewöhnlichen Charaktere in $b_{15,16,21}$ sind genau die Charaktere χ_{15} , χ_{16} und die $\frac{\ell^f - 1}{2}$ irreduziblen Charaktere $\chi_{21}(k)$ mit $k \in \{1, \dots, q^3 - 2\}$, $k \neq \frac{q^3 - 1}{2}$, k Vielfaches von m (die Anzahl $\frac{\ell^f - 1}{2}$ erhält man wegen $\chi_{21}(k) = \chi_{21}(q^3 - 1 - k)$).

Eine Defektgruppe von $b_{15,16,21}$ ist eine zyklische ℓ -Sylowgruppe von P der Ordnung ℓ^f . Der Block $b_{15,16,21}$ enthält genau 2 irreduzible Brauer-Charaktere, und der Brauer-Baum von $b_{15,16,21}$ hat die Form:

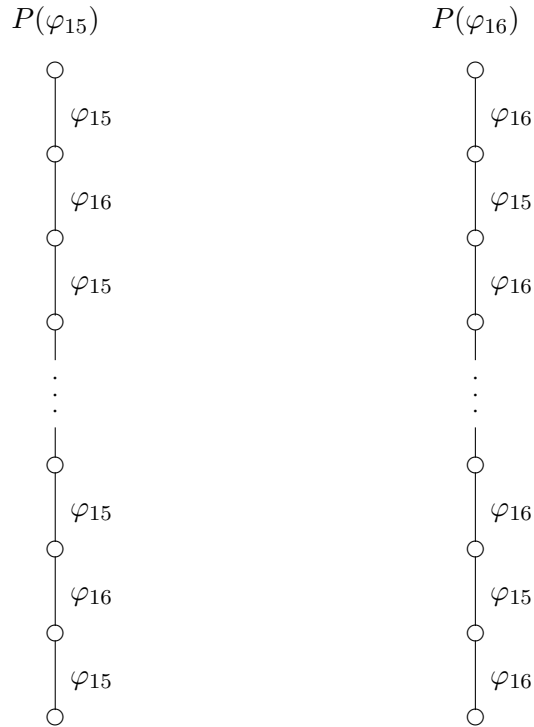


Bei geeigneter Nummerierung der beiden irreduziblen Brauer-Charaktere in $b_{15,16,21}$ hat die Zerlegungsmatrix dieses Blockes die Gestalt:

	φ_{15}	φ_{16}
χ_{15}	1	0
χ_{16}	0	1
$\{\chi_{21}\}$	1	1

Tabelle 5.1: Zerlegungsmatrix von $b_{15,16,21}$

Bezeichnet man die einfachen kP -Moduln mit Brauer-Charakter φ_{15} bzw. φ_{16} ebenfalls mit φ_{15} bzw. φ_{16} , so besitzen die projektiven Hüllen $P(\varphi_{15})$ und $P(\varphi_{16})$ von φ_{15} bzw. φ_{16} die folgende Loewy-Struktur:



Sowohl $P(\varphi_{15})$ als auch $P(\varphi_{16})$ sind uniseriell mit Loewy-Länge ℓ^f .

Die unzerlegbaren Moduln in $b_{15,16,21}$ sind (bis auf Isomorphie) genau die Faktormoduln von $P(\varphi_{15})$ und $P(\varphi_{16})$. Insbesondere sind sie uniseriell, und ihre Loewy-Länge ist kleiner oder gleich ℓ^f .

Beweis:

Wir beginnen mit der Bestimmung einer Defektgruppe von $b_{15,16,21}$. Nach Satz 4.8.1 ist $\bar{I}_5 = L'_P$ und somit

$$|\bar{I}_5| = q^3(q^2 + q + 1)(q^2 - q + 1)(q + 1)(q - 1).$$

Also ist die Untergruppe

$$D := \{h(t, 1, t^q, t^{q^2}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{\ell^f} = 1\}.$$

der Ordnung ℓ^f eine ℓ -Sylogruppe von $\bar{I}_5$ (zur Definition von L'_P siehe (4.5) in Abschnitt 4.3). Also ist D eine Defektgruppe des Hauptblocks von $\bar{I}_5$ und daher nach der

Fong–Reduktion Satz 5.1.6, (d) und Satz 5.1.7, (d) auch eine Defektgruppe von $b_{15,16,21}$. Damit haben wir eine Defektgruppe von $b_{15,16,21}$ gefunden.

Als nächstes bestimmen wir die Anzahl der irreduziblen Brauer–Charaktere in $b_{15,16,21}$. Wir wollen hierzu Lemma 5.1.11 benutzen. Auf Grund der Eindeutigkeit der Bruhat–Zerlegung, sind zwei Elemente aus D genau dann in P konjugiert, wenn sie in $\langle n_\alpha \rangle$ konjugiert sind. Da D zyklisch ist, folgt hieraus bereits:

$$|N_P(D)/C_P(D)| \leq 2$$

(mit wenig Aufwand kann man auch Gleichheit zeigen). Nach Lemma 5.1.11 ist somit die Anzahl der irreduziblen Brauer–Charaktere in $b_{15,16,21}$ kleiner oder gleich 2. Aus Lemma 5.1.9 (angewandt auf den Hauptblock von $\bar{I}_5$) folgt dann weiter, dass sie gleich 2 ist. Nach Satz 5.1.10 ist dann die Anzahl der irreduziblen gewöhnlichen Charaktere in $b_{15,16,21}$ gleich $2 + \frac{\ell^f - 1}{2}$.

Wir wollen nun diese $2 + \frac{\ell^f - 1}{2}$ irreduziblen gewöhnlichen Charaktere bestimmen. Bezüglich der durch Satz 5.1.6, (a) und Satz 5.1.7, (a) gegebenen Bijektion zwischen den irreduziblen gewöhnlichen Charakteren des Hauptblocks von $\bar{I}_5$ und den irreduziblen gewöhnlichen Charakteren von $b_{15,16,21}$ entspricht χ_{15} dem trivialen Charakter von $\bar{I}_5$ (dies folgt beispielsweise aus Satz 4.8.1, (c) 5. und den Charaktergraden von $\chi_{15}, \dots, \chi_{22}$). Der Block $b_{15,16,21}$ von P enthält also den irreduziblen gewöhnlichen Charakter χ_{15} . Mit Hilfe von Lemma 5.1.8 rechnet man nach, dass χ_{15}, χ_{16} sowie die $\frac{\ell^f - 1}{2}$ Charaktere $\chi_{21}(k)$ mit $k \in \{1, \dots, q^3 - 2\}$, $k \neq \frac{q^3 - 1}{2}$ und $m \mid k$ zum gleichen Block gehören. Also sind die irreduziblen gewöhnlichen Charaktere im Block $b_{15,16,21}$ genau die Charaktere χ_{15}, χ_{16} sowie $\chi_{21}(k)$ mit $k \in \{1, \dots, q^3 - 2\}$, $k \neq \frac{q^3 - 1}{2}$ und $m \mid k$.

Für $\chi \in \text{Irr}(P)$ bezeichnen wir mit $\check{\chi}$ die Einschränkung von χ auf die ℓ –regulären Konjugiertenklassen von P . Für die Vielfachen $k \in \{1, \dots, q^3 - 2\}$, $k \neq \frac{q^3 - 1}{2}$ von m gilt dann:

$$\check{\chi}_{21}(k) = \check{\chi}_{15} + \check{\chi}_{16}.$$

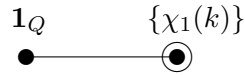
Da der Brauer–Baum von $b_{15,16,21}$ nur 2 Kanten hat, folgen die Aussagen über den Brauer–Baum und die Zerlegungsmatrix von $b_{15,16,21}$ nun trivialerweise. Die Loewy–Struktur der projektiv unzerlegbaren Moduln im Block $b_{15,16,21}$ lässt sich aus dem Brauer–Baum ablesen (vergleiche Alperin [1], Seiten 119ff). Da sämtliche projektiv unzerlegbaren Moduln in $b_{15,16,21}$ uniserial sind, folgen auch die Aussagen über die übrigen unzerlegbaren Moduln in diesem Block.

Damit ist die Behauptung vollständig bewiesen. ■

5.3 Hauptblock der parabolischen Untergruppe Q

Wir behalten die Notation aus dem vorangegangenen Abschnitt bei. In diesem Abschnitt bestimmen wir den Hauptblock der maximalen parabolischen Untergruppe Q für den Fall $e = 3$. Es sei also $\ell > 3$ und $\ell \mid q^2 + q + 1$. Wir definieren $f \in \mathbb{N}$ durch $\ell^f \parallel q^2 + q + 1$. Die irreduziblen Charaktere von Q bezeichnen wir gemäß Tabelle A.54 mit $\chi_1(k)$, $\chi_2(k)$, etc.

Wir behaupten: Im Hauptblock von Q liegen genau ℓ^f gewöhnliche irreduzible Charaktere von Q , nämlich der triviale Charakter $\mathbf{1}_Q = \chi_1(0)$ sowie genau $\ell^f - 1$ weitere lineare Charaktere $\chi_1(k)$, die wir nicht genauer bestimmen wollen. Der Hauptblock von Q enthält genau einen irreduziblen Brauer–Charakter ϕ_0 , und der Brauer–Baum des Hauptblocks hat die Form:



Seine Zerlegungsmatrix hat dann die folgende Gestalt:

	ϕ_0
$\chi_1(k)$	1

Tabelle 5.2: Zerlegungsmatrix des Hauptblocks von Q

Beweis:

Die zyklische Untergruppe

$$\{h(t, 1, t^q, t^{q^2}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{\ell^f} = 1\}$$

von Q hat die Ordnung ℓ^f und ist wegen $|Q| = q^{12}(q^2 + q + 1)(q + 1)(q - 1)^2$ eine ℓ -Sylowgruppe von Q , also eine Defektgruppe des Hauptblocks von Q . Es ist

$$\{h(t, 1, t^q, t^{q^2}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{(q^3-1)/\ell^f} = 1\} \bar{I}_3 U_Q$$

($\bar{I}_3$ wie in Satz 4.9.1) ein normales ℓ -Komplement in Q . Nach Lemma 5.1.9 enthält der Hauptblock somit genau einen irreduziblen Brauer–Charakter, nämlich den trivialen. Die Aussagen über den Brauer–Baum und die Zerlegungsmatrix folgen nun aus Satz 5.1.10, wenn man noch beachtet, dass $\chi_1(k)$ die einzigen linearen Charaktere von Q sind. ■

5.4 Blöcke eines Zentralisators

Wir behalten die Notation aus den vorangegangenen Abschnitten bei. Wie schon in den Abschnitten 3.7 und 4.12 betrachten wir die zyklische Untergruppe D von P , die von einem Element $h := h(t, 1, t^q, t^{q^2})$ mit $t \in \mathbb{F}$, $t^{q^2+q+1} = 1$, $t \neq 1$ erzeugt wird. In diesem Abschnitt wollen wir für den Fall $e = 3$, also $\ell > 3$ und $\ell \mid q^2 + q + 1$, die Blöcke des Zentralisators $C_P(D)$ bestimmen. Wir gehen ähnlich wie in Hiss und Lux [25], Seite 35ff vor. A.a.O. werden Blöcke der Zentralisatoren von Sylowgruppen von Primzahlordnung bestimmt. Die dortigen Aussagen und Beweise funktionieren auch in unserer etwas allgemeineren Situation (D ist nicht notwendigerweise eine Sylowgruppe und auch nicht notwendigerweise von Primzahlordnung). Wir wollen die Aussagen und Beweise daher hier kurz skizzieren.

Wir definieren die natürliche Zahl f durch $\ell^f \parallel q^2 + q + 1$. Es sei

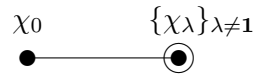
$$\tilde{D} := \{h(t, 1, t^q, t^{q^2}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{\ell^f} = 1\}.$$

Dann ist $\tilde{D}$ eine zentrale Untergruppe von $C_P(D)$ (vergleiche die Zentralisatorordnungen in Tabelle A.25). $\tilde{D}$ ist zyklisch von Ordnung ℓ^f und somit eine ℓ -Sylowgruppe von $C_P(D)$. Nach dem Satz von Schur–Zassenhaus besitzt $\tilde{D}$ ein Komplement K in $C_P(D)$. Also ist $C_P(D)$ ein direktes Produkt

$$C_P(D) = \tilde{D} \times K.$$

Dann sind die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere von $C_P(D)$ bekanntlich durch $\lambda \times \chi$ mit $\lambda \in \text{Irr}(\tilde{D})$ und $\chi \in \text{Irr}(K)$ gegeben, wobei $\lambda \times \chi$ durch $\lambda \times \chi(dk) := \lambda(d)\chi(k)$ definiert ist ($d \in \tilde{D}$, $k \in K$).

Dann gilt (vergleiche Theorem 4.2.1 in Hiss und Lux [25]): Die Blöcke von $C_P(D)$ stehen in Bijektion zu den gewöhnlichen irreduziblen Charakteren von K . Jeder Block B von $C_P(D)$ enthält genau einen gewöhnlichen irreduziblen Charakter χ_0 , dessen Kern $\tilde{D}$ umfasst. Es gilt also $\chi_0 = \mathbf{1}_{\tilde{D}} \times \chi'_0$ für genau ein $\chi'_0 \in \text{Irr}(K)$. Man nennt χ_0 den *kanonischen* Charakter von B . Der Block B enthält genau ℓ^f gewöhnliche irreduzible Charaktere, nämlich $\chi_\lambda := \lambda \times \chi'_0$, $\lambda \in \text{Irr}(\tilde{D})$. Der Block B enthält genau einen irreduziblen Brauer–Charakter ϕ_0 , und ϕ_0 ist die Einschränkung von χ_0 auf die ℓ -regulären Konjugiertenklassen von $C_P(D)$. Der Brauer–Baum von B hat also die folgende Gestalt:



Die Zerlegungsmatrix von B hat dann die folgende Gestalt:

	ϕ_0
χ_λ	1

Tabelle 5.3: Zerlegungsmatrix des Blocks B von $C_P(D)$

Diese Behauptung lässt sich wie folgt beweisen: $\tilde{D}$ ist eine normale ℓ -Untergruppe von $C_P(D)$ und somit im Kern jedes Brauer-Charakters von $C_P(D)$ enthalten. Jeder Brauer-Charakter ϕ von $C_P(D)$ ist also die Inflation eines Brauer-Charakters der Faktorgruppe K . Da K eine ℓ' -Gruppe ist, können wir daher die irreduziblen Brauer-Charaktere von $C_P(D)$ mit den irreduziblen gewöhnlichen Charakteren von K identifizieren. Es sei ϕ_0 ein solcher. Dann sind die gewöhnlichen irreduziblen Charaktere von $C_P(D)$, deren Einschränkung auf die ℓ -regulären Klassen gleich ϕ_0 sind, genau die ℓ^f irreduziblen gewöhnlichen Charaktere der Form $\lambda \times \phi_0$, $\lambda \in \text{Irr}(\tilde{D})$. Hieraus ergibt sich die Zerlegungsmatrix von $C_P(D)$. Daraus folgen dann die Aussagen über die Zerlegungsmatrizen der einzelnen Blöcke, ihre Brauer-Bäume und die Verteilung der gewöhnlichen irreduziblen Charaktere von $C_P(D)$ auf die einzelnen Blöcke. ■

Damit sind die Blöcke von $C_P(D)$ für den Fall $\ell > 3$, $\ell \mid q^2 + q + 1$ bestimmt.

Kapitel 6

Zerlegungszahlen der Trialitätsgruppen

In diesem Kapitel fahren wir mit der Behandlung der modularen Darstellungstheorie der Steinbergschen Trialitätsgruppen in nicht definierender Charakteristik fort. Wir bezeichnen weiterhin mit $G = {}^3D_4(q)$ die Steinbergschen Trialitätsgruppen. Auch in diesem Kapitel setzen wir die Primzahlpotenz q als ungerade voraus. Es sei ℓ eine Primzahl, die q nicht teilt. Im Mittelpunkt dieses Kapitels stehen die ℓ -modularen Zerlegungszahlen der Trialitätsgruppen.

Die ℓ -modularen Zerlegungszahlen von ${}^3D_4(q)$ hängen von der multiplikativen Ordnung von q modulo ℓ ab, die wir mit e bezeichnen. Wie schon in der Einleitung zu Beginn des fünften Kapitels geschildert, liefert die ℓ -modulare Darstellungstheorie von ${}^3D_4(q)$ „im Wesentlichen“ die gleichen Ergebnisse wie die gewöhnliche Darstellungstheorie, falls ℓ die Gruppenordnung $|{}^3D_4(q)|$ nicht teilt. Wir gehen daher davon aus, dass ℓ ein Teiler von

$$|{}^3D_4(q)| = q^{12}(q^8 + q^4 + 1)(q^6 - 1)(q^2 - 1) = q^{12} \phi_{12} \phi_6^2 \phi_3^2 \phi_2^2 \phi_1^2$$

ist, wobei ϕ_i das i -te Kreisteilungspolynom in der Variablen q bezeichne. Somit ist die multiplikative Ordnung e von q modulo ℓ gleich 12, 6, 3, 2 oder 1. Für $e = 12$ sind sämtliche Zerlegungszahlen seit Geck [19] bekannt.

In den anderen Fällen sind noch einige Zerlegungszahlen von ${}^3D_4(q)$ unbekannt. Wir werden in diesem Kapitel neue Ergebnisse über die Zerlegungszahlen von ${}^3D_4(q)$ in den beiden Fällen $e = 6$ und $e = 3$ beweisen.

Insbesondere werden wir zwei der bis dahin unbekannten Zerlegungszahlen explizit bestimmen (eine im Fall $e = 6$ und eine im Fall $e = 3$). Für die anderen unbekannten Zerlegungszahlen in diesen beiden Fällen beweisen wir verbesserte Schranken.

6.1 Bezeichnungen

Im ganzen Kapitel 6 gelten die folgenden Bezeichnungen:

p	eine ungerade Primzahl,
q	eine Potenz von p ,
$\mathbf{G}$	die einfache algebraische Gruppe von adjungiertem Typ mit Dynkin-Diagramm D_4 aus Kapitel 2,
G	die Steinbergsche Trialitätsgruppe ${}^3D_4(q)$,
P	die in Abschnitt 3.5 definierte maximale parabolische Untergruppe von G ,
U_P	das unipotente Radikal von P ,
L_P	das in Abschnitt 3.3 definierte Levi-Komplement von P ,
ℓ	eine von p verschiedene Primzahl,
e	die multiplikative Ordnung von q modulo ℓ ,
(K, R, k)	ein ℓ -modulares Zerfallungssystem für alle Untergruppen von G ,
$\mathcal{E}_\ell(G, 1)$	die zu $1 \in \mathbf{G}^*$ gehörende geometrische Konjugiertenklasse von ℓ -Blöcken von G (wobei mit $\mathbf{G}^*$ die zu $\mathbf{G}$ duale Gruppe gemeint ist).

Wenn wir von Blöcken, Brauer-Charakteren, projektiven Charakteren oder Zerlegungsmatrizen reden, so beziehen wir dies stets auf das obige ℓ -modulare System.

6.2 Zerlegungszahlen der Trialitätsgruppen

Wie schon in der Einleitung zu diesem Kapitel erwähnt, hängen die ℓ -modularen Zerlegungszahlen von $G = {}^3D_4(q)$ von der multiplikativen Ordnung e von q modulo ℓ ab. Ist $e \notin \{1, 2, 3, 6, 12\}$, so ist die ℓ -modulare Zerlegungsmatrix von G trivialerweise die Einheitsmatrix (bei geeigneter Anordnung von Zeilen und Spalten). Interessante Aussagen über die Zerlegungszahlen von G kann man also nur für $e \in \{1, 2, 3, 6, 12\}$ erhalten.

Ist $e = 12$, so sind die ℓ -Sylowgruppen von G zyklisch und Geck konnte in [19] sämtliche Zerlegungszahlen mit Hilfe der Brauer-Dade-Theorie bestimmen. In den anderen Fällen sind jedoch bis heute noch einige Zerlegungszahlen unbekannt. In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit den Fällen $e = 6$ und $e = 3$. Von besonderem Interesse sind die Zerlegungszahlen der unipotenten Charaktere. Die hierzu bekannten Ergebnisse findet man ebenfalls in Geck [19] und sind in den folgenden beiden Sätzen zusammengefasst:

6.2.1 Satz (Geck, 1990)

Mit den Bezeichnungen aus 6.1 gilt im Fall $e = 6$: In $\mathcal{E}_\ell(G, 1)$ liegen genau 8 irreduzible Brauer-Charaktere $\phi_1, \dots, \phi_8$. Bei geeigneter Nummerierung sind die Zerlegungszahlen der unipotenten Charaktere wie folgt gegeben (Nullen sind durch Punkte ersetzt):

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8
1	1	.	.	.	.	.	.	.
$[\varepsilon_1]$	.	1	.	.	.	.	.	.
$[\rho_1]$	.	.	1	.	.	.	.	.
$[\rho_2]$	1	1	.	1	.	.	.	.
${}^3D_4[-1]$	.	.	.	.	1	.	.	.
${}^3D_4[1]$	.	.	.	.	.	1	.	.
$[\varepsilon_2]$	1	.	.	1	a	.	1	.
St	.	1	.	1	b	c	d	1

Tabelle 6.1: Zerlegungszahlen der unipotenten Charaktere im Fall $e = 6$

$$\begin{aligned}
 \text{Es gilt:} \quad 0 &\leq a \leq \frac{q(q-1)}{2}, \\
 0 &\leq b \leq \frac{q^3-1}{2}, \\
 0 &\leq c \leq \frac{q-1}{2}, \\
 0 &\leq d \leq q
 \end{aligned}$$

$$\text{und} \quad 2a + b - 2 \geq 0.$$

$[\rho_1]$ ist ein Defekt-0-Charakter.

Beweis: Der Satz ist lediglich eine Umformulierung einer Teilaussage von Satz 3.13.3 in Geck [19]. Man beachte, dass $e = 6$ äquivalent zu $\ell > 3$ und $\ell \mid q^2 - q + 1$ ist. Die oberen Schranken für a, b, c, d sind in Gecks Satz 3.13.3 nicht ausdrücklich erwähnt, ergeben sich jedoch implizit aus seinem Beweis. ■

Gecks entsprechendes Resultat für $e = 3$ lautet:

6.2.2 Satz (Geck, 1990)

Mit den Bezeichnungen aus 6.1 gilt im Fall $e = 3$: In $\mathcal{E}_\ell(G, 1)$ liegen genau 8 irreduzible Brauer–Charaktere $\phi_1, \dots, \phi_8$. Bei geeigneter Nummerierung sind die Zerlegungszahlen der unipotenten Charaktere wie folgt gegeben (Nullen sind durch Punkte ersetzt):

	ϕ_1	ϕ_2	ϕ_3	ϕ_4	ϕ_5	ϕ_6	ϕ_7	ϕ_8
1	1	.	.	.	.	.	.	.
$[\varepsilon_1]$	.	1	.	.	.	.	.	.
$[\rho_1]$	.	1	1	.	.	.	.	.
$[\rho_2]$	1	.	.	1	.	.	.	.
${}^3D_4[-1]$	.	.	.	.	1	.	.	.
${}^3D_4[1]$	.	.	.	.	.	1	.	.
$[\varepsilon_2]$	.	.	1	.	.	a	1	.
St	.	.	.	1	.	b	c	1

Tabelle 6.2: Zerlegungszahlen der unipotenten Charaktere im Fall $e = 3$

$$\begin{aligned}
 \text{Es gilt:} \quad 1 &\leq a \leq \frac{q(q+1)}{2}, \\
 0 &\leq b \leq \frac{q^3-1}{2}, \\
 2 &\leq c \leq q.
 \end{aligned}$$

${}^3D_4[-1]$ ist ein Defekt-0-Charakter.

Beweis: Der Satz ist lediglich eine Umformulierung einer Teilaussage von Satz 3.13.3 in Geck [19]. Man beachte, dass $e = 3$ äquivalent zu $\ell > 3$ und $\ell \mid q^2 + q + 1$ ist. Die oberen Schranken für a, b, c sind in Gecks Satz 3.13.3 nicht ausdrücklich erwähnt, ergeben sich jedoch implizit aus seinem Beweis. ■

6.2.3 Bemerkung

Geck hat in [19] auch in den Fällen $e = 1$ und $e = 2$ weitreichende Aussagen über die Zerlegungszahlen der Trialitätsgruppen bewiesen (sogar einen Großteil dieser Zerlegungs-

zahlen bestimmt). Wir werden auf diese Resultate hier jedoch nicht eingehen, da wir sie im Folgenden nicht benötigen werden.

Die folgenden beiden Sätze verschärfen die Sätze 6.2.1 und 6.2.2. Der Beweis der Sätze 6.2.4 und 6.2.5 wird in den nächsten beiden Abschnitten erbracht.

6.2.4 Satz

Für die in Satz 6.2.1 auftretenden Zerlegungszahlen a , b und d gilt:

$$a = 0$$

und

$$\begin{aligned} 2 &\leq b \leq \frac{q^2-q}{2}, \\ 0 &\leq d \leq q-1. \end{aligned}$$

Beweis: Siehe Abschnitt 6.3.

6.2.5 Satz

Für die in Satz 6.2.2 auftretenden Zerlegungszahlen a und b gilt:

$$a = 2$$

und

$$0 \leq b \leq \frac{q^2-q}{2}.$$

Beweis: Siehe Abschnitt 6.4.

6.3 Beweis von Satz 6.2.4

In diesem Abschnitt wird der Beweis von Satz 6.2.4 geführt. Der Beweis benötigt nur „elementare“ Methoden, d.h. er kommt mit charaktertheoretischen Argumenten ohne die Verwendung von Moduln aus.

Die Voraussetzung $e = 6$ ist äquivalent zu $\ell > 3$ und $\ell \mid q^2 - q + 1$. Die in der Behauptung von Satz 6.2.4 angegebenen unteren Schranken für b und d ergeben sich aus Satz 6.2.1, sobald wir $a = 0$ gezeigt haben. Es sind also nur die oberen Schranken und $a = 0$ zu beweisen.

Nachweis von $d \leq q - 1$:

Wir benutzen die Charaktertafel A.46 der maximalen parabolischen Untergruppe P sowie die Kenntnis der Fusionen A.27 der Konjugiertenklassen von P in G . Der irreduzible gewöhnliche Charakter $\chi_{11}(1)$ von P hat den Grad $q^3(q^2 - q + 1)(q + 1)(q - 1)^2$ und ist somit wegen

$$|P| = q^{12}(q^2 - q + 1)(q^2 + q + 1)(q + 1)(q - 1)^2$$

ein Defekt-0-Charakter von P . Also ist $\chi_{11}(1)\uparrow^G$ projektiv. Mit Hilfe der Charaktertafel A.46 von P , den Fusionen A.27 und der Frobenius-Reziprozität lassen sich die Skalarprodukte von $\chi_{11}(1)\uparrow^G$ mit den unipotenten Charakteren von G berechnen. Man erhält (siehe die zu χ_{11} gehörige Zeile in Tabelle A.48):

	1	$[\varepsilon_1]$	$[\rho_1]$	$[\rho_2]$	${}^3D_4[-1]$	${}^3D_4[1]$	$[\varepsilon_2]$	St
$\chi_{11}(1)\uparrow^G$	0	0	0	0	0	0	1	$q - 1$

Tabelle 6.3: Skalarprodukte von $\chi_{11}(1)\uparrow^G$ mit den unipotenten Charakteren

Hieraus folgt die obere Schranke für d .

Nachweis von $a = 0$ und $b \leq \frac{q^2 - q}{2}$:

Wir benutzen die irreduziblen Charaktere der maximalen parabolischen Untergruppe Q aus Tabelle A.54 sowie die Kenntnis der Fusionen A.32 der Konjugiertenklassen von Q in G . Wegen

$$|Q| = q^{12}(q^2 + q + 1)(q + 1)(q - 1)^2$$

ist in diesem Fall Q eine ℓ' -Untergruppe von G . Also ist jeder irreduzible Charakter von Q projektiv. Daher ist $\chi_{13}\uparrow^G$ ein projektiver Charakter von G . Mit Hilfe der Tabelle A.54, den Fusionen A.32 und der Frobenius-Reziprozität lassen sich die Skalarprodukte von $\chi_{13}\uparrow^G$ mit den unipotenten Charakteren von G berechnen. Man erhält (siehe die zu χ_{13} gehörige Zeile in Tabelle A.55):

	1	$[\varepsilon_1]$	$[\rho_1]$	$[\rho_2]$	${}^3D_4[-1]$	${}^3D_4[1]$	$[\varepsilon_2]$	St
$\chi_{13}\uparrow^G$	0	0	0	0	1	0	0	$\frac{q^2 - q}{2}$

Tabelle 6.4: Skalarprodukte von $\chi_{13}\uparrow^G$ mit den unipotenten Charakteren

Hieraus folgt $a \leq 0$ und $b \leq \frac{q^2 - q}{2}$. ■

6.4 Beweis von Satz 6.2.5

In diesem Abschnitt wird der Beweis von Satz 6.2.5 geführt. Die Voraussetzung $e = 3$ ist äquivalent zu $\ell > 3$ und $\ell \mid q^2 + q + 1$. Wir beginnen mit dem

Nachweis von $b \leq \frac{q^2 - q}{2}$:

Wir benutzen die irreduziblen Charaktere aus Tabelle A.54 der maximalen parabolischen Untergruppe Q sowie die Kenntnis der Fusionen A.32 der Konjugiertenklassen von Q in G . Der irreduzible gewöhnliche Charakter χ_{12} von Q hat den Grad $\frac{1}{2}q^3(q^2 + q + 1)(q - 1)^2$ und ist somit wegen

$$|Q| = q^{12}(q^2 + q + 1)(q + 1)(q - 1)^2$$

ein Defekt-0-Charakter von Q . Also ist $\chi_{12}\uparrow^G$ projektiv. Mit Hilfe von Tabelle A.54, den Fusionen A.32 und der Frobenius-Reziprozität lassen sich die Skalarprodukte von $\chi_{12}\uparrow^G$ mit den unipotenten Charakteren von G berechnen. Man erhält (siehe die zu χ_{12} gehörige Zeile in Tabelle A.48):

	1	$[\varepsilon_1]$	$[\rho_1]$	$[\rho_2]$	${}^3D_4[-1]$	${}^3D_4[1]$	$[\varepsilon_2]$	St
$\chi_{12}\uparrow^G$	0	0	0	0	0	1	q	$\frac{q^2 - q}{2}$

Tabelle 6.5: Skalarprodukte von $\chi_{12}\uparrow^G$ mit den unipotenten Charakteren

Hieraus folgt die obere Schranke für b .

Nachweis von $a = 2$:

Bei dem Beweis von $a = 2$ kommen wir nicht mehr nur mit „elementaren“ charaktertheoretischen Methoden aus, sondern wir werden auch modultheoretische Betrachtungen anstellen.

Die Idee des hier geführten Beweises wurde inspiriert durch Okuyamas und Wakis Arbeit [35] aus dem Jahr 1998 über die Zerlegungszahlen der symplektischen Gruppen $\mathrm{Sp}(4, q)$. Der Beweis von Satz 6.2.5 lässt sich in drei Schritte einteilen:

1. Schritt: Analyse eines Permutationsmoduls M

Wir untersuchen einen Permutationsmodul M von G , bestimmen Kopf und Sockel und einen unzerlegbaren direkten Summanden von M sowie dessen Loewy-Struktur. Hierbei zeigt sich, dass die Zerlegungszahl a als Vielfachheit eines Kompositionsfaktors von M auftritt.

2. Schritt: Analyse der Einschränkung von M auf den Block $b_{15,16,21}$ von P

Wir bestimmen die unzerlegbaren direkten Summanden der Einschränkung von M auf den Block $b_{15,16,21}$ von P und deren Loewy-Struktur. Hierbei benutzen wir eine Verallgemeinerung der Green-Korrespondenz von Burry und Carlson.

3. Schritt: Vergleich von M mit der Einschränkung von M auf $b_{15,16,21}$

Wir vergleichen M mit der Einschränkung von M auf $b_{15,16,21}$. Als Folgerung ergibt sich hieraus $a = 2$.

Wir kommen nun zur Durchführung dieser drei Beweisschritte. Wir definieren die natürliche Zahl f durch $\ell^f \parallel q^2 + q + 1$.

Analyse eines Permutationsmoduls M

Wir betrachten den Permutationsmodul

$$M := k_Q \uparrow^G,$$

wobei k_Q der triviale kQ -Modul zu der maximalen parabolischen Untergruppe Q ist. Als erstes bestimmen wir den Brauer-Charakter von M . Als Permutationsmodul ist M liftbar im Sinne von Definition 5.1.14, und $\widehat{M} := R_Q \uparrow^G$ ist ein Lift von M , wobei R_Q den trivialen RQ -Modul bezeichne. Der gewöhnliche Charakter von $\widehat{M}$ ist $\mathbf{1}_Q \uparrow^G$. Da wir die Fusionen der Konjugiertenklassen von Q in G kennen (siehe Tabelle A.32), können wir $\mathbf{1}_Q \uparrow^G$ explizit als Summe von irreduziblen Charakteren von G schreiben. Man erhält:

$$\mathbf{1}_Q \uparrow^G = \mathbf{1}_G + [\rho_1] + [\rho_2] + [\varepsilon_2] \quad (6.1)$$

(dies könnte man auch ohne Kenntnis der Fusionen durch Rechnen in der Weylgruppe mit Theorem 68.24 in Curtis-Reiner [12] berechnen). Der Brauer-Charakter von M ist die Einschränkung des gewöhnlichen Charakters des Lifts $\widehat{M}$ auf die ℓ -regulären Konjugiertenklassen von G und daher gleich

$$\check{\mathbf{1}}_G + [\check{\rho}_1] + [\check{\rho}_2] + [\check{\varepsilon}_2]$$

(ist χ Klassenfunktion einer endlichen Gruppe, so bezeichnen wir wie schon in Kapitel 5 mit $\check{\chi}$ die Einschränkung von χ auf die ℓ -regulären Konjugiertenklassen). Mittels der Geckschen Zerlegungsmatrix Tabelle 6.2 erhalten wir so den Brauer-Charakter von M :

$$2\phi_1 + \phi_2 + 2\phi_3 + \phi_4 + a \cdot \phi_6 + \phi_7. \quad (6.2)$$

Für $i = 1, \dots, 8$ bezeichnen wir den einfachen kG -Modul mit Brauer-Charakter ϕ_i ebenfalls mit ϕ_i . Da wir mit (6.2) den Brauer-Charakter von M kennen, kennen wir auch

die Kompositionsfaktoren von M (mit Vielfachheiten). Insbesondere kommt der einfache Modul ϕ_6 mit der Vielfachheit a als Kompositionsfaktor von M vor.

Wir beginnen nun mit der Bestimmung des Sockels $\text{soc}(M)$ von M . Angenommen, der $\text{soc}(M)$ enthalte einen direkten Summanden, der isomorph zum einfachen Modul ϕ_2 ist. Dann wäre

$$\text{Hom}_{kQ}(\phi_2 \downarrow_Q, k_Q) \cong \text{Hom}_{kG}(\phi_2, k_Q \uparrow^G) \cong \text{Hom}_{kG}(\phi_2, M) \neq \{0\}.$$

Insbesondere besäße $\phi_2 \downarrow_Q$ den trivialen Modul als Kompositionsfaktor. Da wir die Fusionen der Konjugiertenklassen von Q in G kennen (vergleiche Tabelle A.32), können wir mit Hilfe der Zerlegungsmatrizen Tabelle 6.2 und Tabelle 5.2 die Einschränkung von ϕ_2 auf den Hauptblock von Q ausrechnen. Man erhält (siehe die zu $[\varepsilon_1]$ gehörige Spalte in Tabelle A.55), dass die Einschränkung von ϕ_2 auf den Hauptblock von Q gleich Null ist. Insbesondere besitzt der Modul $\phi_2 \downarrow_Q$ den trivialen Modul nicht als Kompositionsfaktor. Also war unsere Annahme falsch, d.h. der Sockel von M besitzt keinen direkten Summanden, der isomorph zum einfachen Modul ϕ_2 ist.

Durch eine analoge Argumentation zeigt man, dass $\text{soc}(M)$ auch keinen direkten Summanden besitzt, der isomorph zu ϕ_4 , ϕ_6 oder ϕ_7 ist. Also sind alle direkten Summanden von $\text{soc}(M)$ isomorph zu den einfachen Moduln ϕ_1 oder ϕ_3 .

Wir behaupten, dass sowohl der triviale Modul ϕ_1 als auch der einfache Modul ϕ_3 direkte Summanden von $\text{soc}(M)$ sind. Für ϕ_1 folgt dies aus Lemma 5.1.15. Für ϕ_3 argumentiert man so: Da $[\rho_1]$ nach (6.1) ein Konstituent des gewöhnlichen Charakters von $\widehat{M}$ ist, folgt aus dem Zassenhaus–Thompson–Lemma 5.1.16, dass $\widehat{M}$ ein RG –Untergitter mit Charakter $[\rho_1]$ enthält. Aus der Geck’schen Zerlegungsmatrix 6.2 folgt somit, dass M einen Untermodul mit Brauer–Charakter $\phi_2 + \phi_3$ enthält. Also ist der einfache Modul ϕ_2 oder der einfache Modul ϕ_3 ein direkter Summand des Sockels dieses Untermoduls und damit auch direkter Summand von $\text{soc}(M)$. Da – wie oben gezeigt – der einfache Modul ϕ_2 nicht im Sockel von M vorkommt, folgt daher weiter, dass der einfache Modul ϕ_3 ein direkter Summand von $\text{soc}(M)$ ist.

Als nächstes zeigen wir, dass die unzerlegbaren direkten Summanden von M Harish–Chandra–Moduln im Sinne von Definition 5.1.22 sind. Es genügt zu zeigen, dass M ein direkter Summand von $k_B \uparrow^G$ ist. Der Modul $k_B \uparrow^Q$ ist liftbar mit Lift $R_B \uparrow^Q$. Der gewöhnliche Charakter des RQ –Gitters $R_B \uparrow^Q$ ist $\mathbf{1}_B \uparrow^Q$. Mit Hilfe der Charaktertafel von L_Q sieht man:

$$\mathbf{1}_B \uparrow^Q = \mathbf{1}_Q + \widehat{\mathbf{St}}_{L_Q}. \quad (6.3)$$

Da $\mathbf{1}_Q$ und $\widehat{\mathbf{St}}_{L_Q}$ nach Abschnitt 5.3 in unterschiedlichen Blöcken liegen, folgt aus (6.3), dass k_Q direkter Summand von $k_B \uparrow^Q$ ist. Hieraus folgt weiter, dass $M = k_Q \uparrow^G$ ein direkter Summand von $k_B \uparrow^G$ ist. Insbesondere sind die unzerlegbaren direkten Summanden von M Harish–Chandra–Moduln. Nach Proposition 5.1.23 hat somit jeder unzerlegbare direkte

Summand von M einen einfachen Kopf und einen einfachen Sockel, die jeweils zueinander isomorph sind.

Wir schreiben M als direkte Summe

$$M = \bigoplus_{i=1}^k N_i$$

von unzerlegbaren Moduln N_i und definieren:

$$M_1 := \bigoplus_{\substack{i \\ \text{soc}(N_i) \cong \phi_1}} N_i, \quad M_2 := \bigoplus_{\substack{i \\ \text{soc}(N_i) \cong \phi_3}} N_i.$$

Nach Konstruktion ist der Sockel von M_1 eine direkte Summe von (einem oder mehreren) zu ϕ_1 isomorphen einfachen Moduln und der Sockel von M_2 eine direkte Summe von (einem oder mehreren) zu ϕ_3 isomorphen einfachen Moduln. Da wir schon gezeigt haben, dass der Sockel jedes unzerlegbaren direkten Summanden von M isomorph zu ϕ_1 oder ϕ_3 ist, folgt $M = M_1 \oplus M_2$.

Aus (6.1), dem Zassenhaus–Thompson–Lemma und der Zerlegungsmatrix 6.2 folgt weiter, dass M einen Untermodul U mit Brauer–Charakter $\phi_1 + \phi_4$ enthält. Da ϕ_4 nicht in $\text{soc}(M)$ vorkommt, folgt $\text{soc}(U) \cong \phi_1$. Wegen der Sockel von U und M_2 ist somit $U \cap M_2 = \{0\}$. Also liefert der kanonische Epimorphismus $M \rightarrow M/M_2 \cong M_1$ eine Einbettung von U in M_1 . Daher sind ϕ_1 und ϕ_4 Kompositionsfaktoren von M_1 . Hieraus folgt, dass M_1 einen unzerlegbaren direkten Summanden mit Kompositionsfaktoren ϕ_1 und ϕ_4 besitzt. Da dieser ein Harish–Chandra–Modul mit Sockel ϕ_1 ist, kommt ϕ_1 auch im Kopf dieses unzerlegbaren direkten Summanden von M_1 vor. Also: M_1 enthält einen unzerlegbaren direkten Summanden mit Kompositionsfaktoren ϕ_1, ϕ_4, ϕ_1 (und eventuell noch weiteren Kompositionsfaktoren).

Aus (6.1), dem Zassenhaus–Thompson–Lemma und der Zerlegungsmatrix 6.2 folgt weiter, dass M einen Untermodul mit Brauer–Charakter $\phi_3 + a \cdot \phi_6 + \phi_7$ und einen Untermodul mit Brauer–Charakter $\phi_2 + \phi_3$ enthält. Analog zu oben folgt hieraus, dass M_2 einen unzerlegbaren direkten Summanden mit Kompositionsfaktoren $\phi_3, \phi_2, a \cdot \phi_6, \phi_7, \phi_3$ (und eventuell noch weiteren Kompositionsfaktoren) besitzt.

Aus dem Brauer–Charakter von M (siehe (6.2)) folgt somit, dass M_1 und M_2 unzerlegbar sind und dass M_1 genau die Kompositionsfaktoren

$$\phi_1, \phi_4, \phi_1$$

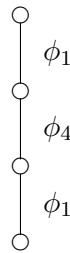
und M_2 genau die Kompositionsfaktoren

$$\phi_3, \phi_2, a \cdot \phi_6, \phi_7, \phi_3$$

hat. Damit ist gezeigt:

M enthält zwei Untermoduln M_1 und M_2 so dass gilt:

- (a) $M = M_1 \oplus M_2$ und M_1, M_2 sind unzerlegbar.
- (b) M_1 ist uniseriell mit Loewy-Struktur:



- (c) Die Kompositionsfaktoren von M_2 sind $\phi_2 + 2 \cdot \phi_3 + a \cdot \phi_6 + \phi_7$, und für den Kopf und den Sockel von M_2 gilt: $\text{head}(M_2) \cong \text{soc}(M_2) \cong \phi_3$.

Wir kommen nun zum zweiten Beweisschritt:

Analyse der Einschränkung von M auf $b_{15,16,21}$

Als nächstes sollen die unzerlegbaren direkten Summanden der Einschränkung von M auf den Block $b_{15,16,21}$ von P sowie deren Loewy-Struktur bestimmt werden. Nach dem Satz von Mackey gilt:

$$M \downarrow_P = (k_Q \uparrow^G) \downarrow_P \cong \bigoplus_{g \in P \backslash G / Q} (k_{P \cap g Q g^{-1}}) \uparrow^P.$$

Für Doppelnebenklassen nach parabolischen Untergruppen lässt sich mit Hilfe der Weylgruppe ein ausgezeichnetes Vertretersystem bestimmen (siehe Proposition 2.7.3 und Proposition 2.8.1 in Carter [7]). Als Vertretersystem für $P \backslash G / Q$ wählen wir

$$\{1, n_\beta n_\alpha, n_\beta n_\alpha n_\beta n_\alpha\}.$$

Somit gilt:

$$M \downarrow_P \cong (k_{P \cap Q}) \uparrow^P \oplus (k_{P \cap n_\beta n_\alpha Q}) \uparrow^P \oplus (k_{P \cap n_\beta n_\alpha n_\beta n_\alpha Q}) \uparrow^P. \quad (6.4)$$

Bekanntlich gilt $P \cap Q = B$. Aus den Relationen in Tabelle 2.4 erhalten wir außerdem:

$$T X_\alpha X_{2\alpha+\beta} X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta} \subseteq P \cap n_\beta n_\alpha Q \quad \text{und} \quad (6.5)$$

$$T X_\alpha X_{3\alpha+\beta} \subseteq P \cap n_\beta n_\alpha n_\beta n_\alpha Q, \quad (6.6)$$

wobei $T = \mathbf{T}^F$ der in Abschnitt 2.3 auf Seite 47 definierte maximale Torus von G ist. Wegen (6.4) folgt aus Dimensionsgründen sogar Gleichheit in (6.5) und (6.6). Aus (6.4) erhalten wir damit:

$$M \downarrow_P \cong k_B \uparrow^P \oplus (k_{TX_\alpha X_{2\alpha+\beta} X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}}) \uparrow^P \oplus (k_{TX_\alpha X_{3\alpha+\beta}}) \uparrow^P. \quad (6.7)$$

Wir überlegen uns nun, welche der drei direkten Summanden auf der rechten Seite dieser Isomorphie unzerlegbare direkte Summanden im Block $b_{15,16,21}$ besitzen. Die beiden direkten Summanden $k_B \uparrow^P$ und $(k_{TX_\alpha X_{2\alpha+\beta} X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}}) \uparrow^P$ sind jeweils liftbar mit gewöhnlichem Charakter $\mathbf{1}_B \uparrow^P$ bzw. $(\mathbf{1}_{TX_\alpha X_{2\alpha+\beta} X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}}) \uparrow^P$. Das Zentrum $X_{3\alpha+2\beta}$ des unipotenten Radikals U_P ist ein Normalteiler von P , der sowohl in B als auch in $TX_\alpha X_{2\alpha+\beta} X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}$ enthalten ist. Also liegt $X_{3\alpha+2\beta}$ im Kern jedes gewöhnlichen irreduziblen Konstituenten von $\mathbf{1}_B \uparrow^P$ und im Kern jedes gewöhnlichen irreduziblen Konstituenten von $(\mathbf{1}_{TX_\alpha X_{2\alpha+\beta} X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}}) \uparrow^P$. Aus der Charaktertafel von P (Tabelle A.46) folgt jedoch, dass die irreduziblen Charaktere χ_{15} , χ_{16} und $\chi_{21}(k)$ den Normalteiler $X_{3\alpha+2\beta}$ nicht im Kern haben. Also ist die Einschränkung von $k_B \uparrow^P$ und $(k_{TX_\alpha X_{2\alpha+\beta} X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}}) \uparrow^P$ auf den Block $b_{15,16,21}$ von P gleich Null, und nur der dritte direkte Summand in (6.7) besitzt unzerlegbare direkte Summanden im Block $b_{15,16,21}$.

Wir wollen uns nun Informationen über die unzerlegbaren direkten Summanden von $(k_{TX_\alpha X_{3\alpha+\beta}}) \uparrow^P$ im Block $b_{15,16,21}$ verschaffen. Zur Abkürzung setzen wir $H := TX_\alpha X_{3\alpha+\beta}$. Wir beginnen mit den nichtprojektiven unzerlegbaren direkten Summanden von $k_H \uparrow^P$ im Block $b_{15,16,21}$. Hierzu wollen wir Korollar 5.1.20 benutzen. Wir beginnen daher mit der Verifikation der Voraussetzungen für dieses Korollar. Die Untergruppe

$$D := \{h(t, 1, t^q, t^{q^2}) \mid t \in \mathbb{F}, t^{\ell^f} = 1\}$$

ist eine zyklische Untergruppe der Ordnung ℓ^f von P und daher wegen

$$|P| = q^{12}(q^2 - q + 1)(q^2 + q + 1)(q + 1)(q - 1)^2$$

eine ℓ -Sylogruppe von P . Wegen $T \leq H$ ist auch $D \leq H$. Auf Grund der Eindeutigkeit der Bruhat-Zerlegung sind zwei Elemente aus D genau dann in P konjugiert, wenn sie in $\langle n_\alpha \rangle$ konjugiert sind. Da D zyklisch ist, folgt hieraus bereits:

$$|N_P(D)/C_P(D)| \leq 2.$$

Da n_α gemäß Tabelle A.23 kein von 1 verschiedenes Element aus D zentralisiert, folgt weiter

$$|N_P(D)/C_P(D)| = 2 \text{ und } N_P(D) = \langle C_P(D), n_\alpha \rangle.$$

In Abschnitt 3.7 hatten wir bereits

$$C_P(D) = TX_\beta X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}$$

gezeigt, und gesehen, dass der Zentralisator in P jeder nichttrivialen Untergruppe von D gleich $TX_\beta X_{3\alpha+\beta} X_{3\alpha+2\beta}$ ist. Die gleiche Argumentation wie eben zeigt dann, dass der Normalisator in P jeder nichttrivialen Untergruppe von D gleich $N_P(D) = \langle C_P(D), n_\alpha \rangle$ ist. Um nachzuweisen, dass alle Voraussetzungen von Korollar 5.1.20 erfüllt sind, müssen wir also nur noch zeigen, dass D eine TI -Untergruppe von P ist. Es sei dazu $x \in P$ mit $D \cap {}^x D \neq \{1\}$. Da D zyklisch ist, wird dann $D \cap {}^x D$ von x normalisiert. Mit anderen Worten: x ist im Normalisator einer nichttrivialen Untergruppe von D enthalten. Dieser ist aber – wie eben gesehen – gleich dem Normalisator von D . Also ist ${}^x D = D$ und somit D eine TI -Untergruppe.

Da nun alle Voraussetzungen von Korollar 5.1.20 bestätigt sind, folgt aus Korollar 5.1.20 (angewandt auf P statt G): Die Green-Korrespondenz (Satz 5.1.17) induziert eine vielfachheitserhaltende Bijektion zwischen der Menge der Isomorphieklassen der nichtprojektiven unzerlegbaren direkten Summanden von $k_H \uparrow^P$ und der Menge der Isomorphieklassen der nichtprojektiven unzerlegbaren direkten Summanden von $k_{N_H(D)} \uparrow^{N_P(D)}$. Aus Satz 5.1.21 folgt weiter: Die Green-Korrespondenz (Satz 5.1.17) induziert eine vielfachheitserhaltende Bijektion zwischen der Menge der Isomorphieklassen der nichtprojektiven unzerlegbaren direkten Summanden von $k_H \uparrow^P$ im Block $b_{15,16,21}$ und der Menge der Isomorphieklassen der nichtprojektiven unzerlegbaren direkten Summanden von $k_{N_H(D)} \uparrow^{N_P(D)}$ im Brauer-Korrespondenten von $b_{15,16,21}$.

Um eine obere Schranke für die Anzahl der nichtprojektiven unzerlegbaren direkten Summanden von $k_H \uparrow^P$ im Block $b_{15,16,21}$ zu erhalten, genügt es also, die unzerlegbaren direkten Summanden von $k_{N_H(D)} \uparrow^{N_P(D)}$ im Brauer-Korrespondenten von $b_{15,16,21}$ zu untersuchen. Wegen $H \leq B$ ist $N_H(D) = C_H(D) = C_P(D) \cap H = TX_{3\alpha+\beta}$. Somit gilt:

$$k_{N_H(D)} \uparrow^{N_P(D)} = k_{C_H(D)} \uparrow^{N_P(D)} \cong \left(k_{TX_{3\alpha+\beta}} \uparrow^{C_P(D)} \right) \uparrow^{N_P(D)}. \quad (6.8)$$

Der Modul $k_{TX_{3\alpha+\beta}} \uparrow^{C_P(D)}$ ist liftbar mit gewöhnlichem Charakter $\mathbf{1}_{TX_{3\alpha+\beta}} \uparrow^{C_P(D)}$. Genau diesen Permutationscharakter hatten wir in Abschnitt 4.12 ausgerechnet und in seine irreduziblen Konstituenten zerlegt. Wir hatten gesehen (siehe (4.21)):

$$\mathbf{1}_{TX_{3\alpha+\beta}} \uparrow^{C_P(D)} = \mathbf{1}_{C_P(D)} + {}_{C_P(D)}\chi_1 + {}_{C_P(D)}\chi_2.$$

An Hand von Tabelle A.49 sieht man mit Hilfe zentraler Charaktere (Lemma 5.1.8), dass die drei irreduziblen Konstituenten von $\mathbf{1}_{TX_{3\alpha+\beta}} \uparrow^{C_P(D)}$ in paarweise verschiedenen Blöcken von $C_P(D)$ liegen. Zur Abkürzung bezeichnen wir für den Moment den Hauptblock von $C_P(D)$ mit b_0 , den Block von ${}_{C_P(D)}\chi_1$ mit b_1 und den Block von ${}_{C_P(D)}\chi_2$ mit b_2 . In Abschnitt 5.4 hatten wir auch schon die Zerlegungsmatrizen der Blöcke von $C_P(D)$ bestimmt. Wir hatten dort gesehen, dass jeder Block von $C_P(D)$ genau einen irreduziblen Brauer-Charakter enthält und dass die Einschränkung jedes irreduziblen gewöhnlichen Charakters aus einem Block von $C_P(D)$ auf die ℓ -regulären Konjugiertenklassen von $C_P(D)$ gleich diesem irreduziblen Brauer-Charakter ist (vergleiche die Zerlegungsmatrizen Tabelle 5.3).

Also gibt es für $i = 0, 1, 2$ einen einfachen $kC_P(D)$ -Modul ψ_i , der im Block b_i liegt, so dass gilt:

$$k_{TX_{3\alpha+\beta}} \uparrow^{C_P(D)} \cong \psi_0 \oplus \psi_1 \oplus \psi_2$$

(hierbei ist ψ_0 der triviale $kC_P(D)$ -Modul). Wegen (6.8) gilt also:

$$k_{N_H(D)} \uparrow^{N_P(D)} \cong \psi_0 \uparrow^{N_P(D)} \oplus \psi_1 \uparrow^{N_P(D)} \oplus \psi_2 \uparrow^{N_P(D)}.$$

Wir hatten schon gesehen, dass $N_P(D)/C_P(D)$ zyklisch von Ordnung 2 ist. Nach Lemma 5.1.12 und Lemma 5.1.13 ist daher für $i = 0, 1, 2$ der Modul $\psi_i \uparrow^{N_P(D)}$ entweder einfach oder die direkte Summe zweier einfacher Moduln. Da die Blöcke b_0, b_1 und b_2 in $N_P(D)$ paarweise nicht konjugiert sind, liegen für $i, j = 0, 1, 2, i \neq j$, die unzerlegbaren direkten Summanden von $\psi_i \uparrow^{N_P(D)}$ in einem anderen Block von $N_P(D)$ als die unzerlegbaren direkten Summanden von $\psi_j \uparrow^{N_P(D)}$. Damit haben wir gezeigt: Schreibt man $k_{N_H(D)} \uparrow^{N_P(D)}$ als eine direkte Summe von unzerlegbaren $kN_P(D)$ -Moduln, so liegen davon höchstens zwei im gleichen Block. Wie bereits oben angedeutet, folgt hieraus mit Korollar 5.1.20 und Satz 5.1.21: Schreibt man die Einschränkung von M auf den Block $b_{15,16,21}$ als direkte Summe von unzerlegbaren Moduln, so sind davon höchstens 2 nicht projektiv!

Nun ist es nicht mehr schwierig, die Struktur der Einschränkung von M auf $b_{15,16,21}$ zu bestimmen. Wie in Satz 6.2.2 bezeichnen wir die irreduziblen Brauer-Charaktere in $\mathcal{E}_\ell(G, 1)$ mit $\phi_1, \dots, \phi_8$. Die irreduziblen Brauer-Charaktere im Block $b_{15,16,21}$ bezeichnen wir wie in Tabelle 5.1 mit φ_{15} und φ_{16} . Da wir nach Tabelle A.48 wissen, wie sich die Einschränkungen der unipotenten Charaktere von G auf P als Linearkombinationen von irreduziblen gewöhnlichen Charakteren schreiben lassen, können wir mit Hilfe der Zerlegungsmatrizen Tabelle 6.2 und Tabelle 5.1 die Einschränkungen der Brauer-Charaktere $\phi_1, \dots, \phi_8$ auf den Block $b_{15,16,21}$ von P ausrechnen. Diese Einschränkungen sehen als Linearkombinationen von φ_{15} und φ_{16} wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \phi_1 \downarrow_{b_{15,16,21}} &= 0 \\ \phi_2 \downarrow_{b_{15,16,21}} &= \varphi_{15} \\ \phi_3 \downarrow_{b_{15,16,21}} &= \varphi_{16} \\ \phi_4 \downarrow_{b_{15,16,21}} &= \varphi_{16} \\ \phi_5 \downarrow_{b_{15,16,21}} &= 0 \\ \phi_6 \downarrow_{b_{15,16,21}} &= \varphi_{15} \\ \phi_7 \downarrow_{b_{15,16,21}} &= \left(\frac{\ell^f - 1}{2} - a \right) \cdot \varphi_{15} + \left(\frac{\ell^f - 1}{2} - 1 \right) \cdot \varphi_{16} \\ \phi_8 \downarrow_{b_{15,16,21}} &= \left((q - c) \frac{\ell^f - 1}{2} + ac - b + 1 \right) \cdot \varphi_{15} + \\ &\quad \left((q - c) \frac{\ell^f - 1}{2} + q + c \right) \cdot \varphi_{16} \end{aligned}$$

Im Folgenden bezeichnen wir der Einfachheit halber die einfachen kP -Moduln mit Brauer-Charakter φ_{15} bzw. Brauer-Charakter φ_{16} ebenfalls mit φ_{15} bzw. φ_{16} .

Wie schon im ersten Beweisschritt zerlegen wir den Modul M in eine direkte Summe der unzerlegbaren Moduln M_1 und M_2 . Da M_1 die Kompositionsfaktoren ϕ_1, ϕ_4, ϕ_1 besitzt, ist die Einschränkung von M_1 auf den Block $b_{15,16,21}$ von P isomorph zum einfachen kP -Modul φ_{16} . Damit haben wir bereits einen nichtprojektiven unzerlegbaren direkten Summanden der Einschränkung von M auf $b_{15,16,21}$ gefunden. Insbesondere kann die Einschränkung des anderen direkten Summanden M_2 auf $b_{15,16,21}$ höchstens einen nichtprojektiven direkten Summanden besitzen.

Der unzerlegbare direkte Summand M_2 besitzt die Kompositionsfaktoren $\phi_3, \phi_2, a \cdot \phi_6, \phi_7, \phi_3$. Die Einschränkung von M_2 auf $b_{15,16,21}$ hat also den Brauer-Charakter:

$$\frac{\ell^f + 1}{2} \cdot \varphi_{15} + \frac{\ell^f + 1}{2} \cdot \varphi_{16}.$$

Wie wir aus Abschnitt 5.2 wissen, gibt es in $b_{15,16,21}$ (bis auf Isomorphie) genau zwei projektiv unzerlegbare Moduln, nämlich die projektive Hülle $P(\varphi_{15})$ des einfachen Moduls φ_{15} mit Brauer-Charakter $\frac{\ell^f+1}{2}\varphi_{15} + \frac{\ell^f-1}{2}\varphi_{16}$ und die projektive Hülle $P(\varphi_{16})$ des einfachen Moduls φ_{16} mit Brauer-Charakter $\frac{\ell^f-1}{2}\varphi_{15} + \frac{\ell^f+1}{2}\varphi_{16}$. Da wir bereits wissen, dass die Einschränkung von M_2 auf den Block $b_{15,16,21}$ höchstens einen nichtprojektiven unzerlegbaren direkten Summanden besitzt, bleiben auf Grund der Brauer-Charaktere nur die beiden Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} M_2 \downarrow_{b_{15,16,21}} &\cong \varphi_{15} \oplus P(\varphi_{16}) && \text{oder} \\ M_2 \downarrow_{b_{15,16,21}} &\cong \varphi_{16} \oplus P(\varphi_{15}). \end{aligned}$$

Die Loewy-Struktur von $P(\varphi_{15})$ und $P(\varphi_{16})$ kennen wir bereits aus Abschnitt 5.2. Angenommen, es wäre $M_2 \downarrow_{b_{15,16,21}} \cong \varphi_{16} \oplus P(\varphi_{15})$. Aus $\text{soc}(M_2) \cong \phi_3$ und $\phi_3 \downarrow_{b_{15,16,21}} \cong \varphi_{16}$ folgt dann einerseits $(M_2/\text{soc}(M_2)) \downarrow_{b_{15,16,21}} \cong P(\varphi_{15})$. Andererseits ist φ_{16} wegen $\text{head}(M_2) \cong \phi_3$ und $\phi_3 \downarrow_{b_{15,16,21}} \cong \varphi_{16}$ ein Faktor von $(M_2/\text{soc}(M_2)) \downarrow_{b_{15,16,21}}$, ein Widerspruch. Also gilt:

$$M_2 \downarrow_{b_{15,16,21}} \cong \varphi_{15} \oplus P(\varphi_{16}).$$

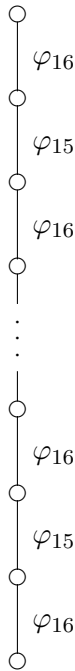
Damit ist gezeigt: Die Einschränkung des unzerlegbaren direkten Summanden M_1 von M ist isomorph zum einfachen kP -Modul φ_{16} , und die Einschränkung des unzerlegbaren direkten Summanden M_2 von M ist isomorph zu einer direkten Summe aus dem einfachen kP -Modul φ_{15} und der projektiven Hülle $P(\varphi_{16})$ des einfachen kP -Moduls φ_{16} . Also:

$$\begin{aligned} M_1 \downarrow_{b_{15,16,21}} &\cong \varphi_{16} && \text{und} \\ M_2 \downarrow_{b_{15,16,21}} &\cong \varphi_{15} \oplus P(\varphi_{16}). \end{aligned}$$

Wir kommen nun zum dritten und letzten Beweisschritt:

Vergleich von M mit der Einschränkung von M auf $b_{15,16,21}$

Wir behalten die Notation aus den ersten beiden Beweisschritten bei. Wir erinnern noch einmal daran, dass der direkte Summand M_2 von M die Kompositionsfaktoren ϕ_3 , ϕ_2 , $a \cdot \phi_6$, ϕ_7 und ϕ_3 hat und dass $\text{head}(M_2) \cong \text{soc}(M_2) \cong \phi_3$ gilt. Wir hatten gesehen, dass die Einschränkung von M_2 auf den Block $b_{15,16,21}$ von P die direkte Summe aus einem zu φ_{15} isomorphen einfachen Modul und einem uniseriellen Modul mit der folgenden Loewy-Struktur (mit Loewy-Länge ℓ^f) ist:



Wir erinnern außerdem an:

$$\begin{aligned}
 \phi_2 \downarrow_{b_{15,16,21}} &= \varphi_{15} \\
 \phi_3 \downarrow_{b_{15,16,21}} &= \varphi_{16} \\
 \phi_6 \downarrow_{b_{15,16,21}} &= \varphi_{15}.
 \end{aligned} \tag{6.9}$$

Wir rufen darüber hinaus in Erinnerung, dass wir aus Abschnitt 5.2 die Loewy-Struktur sämtlicher unzerlegbarer Moduln im Block $b_{15,16,21}$ kennen.

Wir zeigen zunächst $a \leq 2$. Es sei M_0 ein Untermodul von M_2 , der minimal ist bezüglich der Eigenschaft, einen zu ϕ_7 isomorphen Kompositionsfaktor zu besitzen. Wir untersuchen nun die Moduln M_0 und M_2/M_0 . Es sei x die Vielfachheit von ϕ_6 als Kompositionsfaktor von M_2/M_0 und y die Vielfachheit von ϕ_6 als Kompositionsfaktor von M_0 . Dann gilt also

$$x + y = a. \tag{6.10}$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

1. Fall: ϕ_2 ist Kompositionsfaktor von M_0 :

Dann hat M_0 die Kompositionsfaktoren $\phi_7, \phi_2, y \cdot \phi_6, \phi_3$, und wegen $\text{soc}(M_2) \cong \phi_3$ gilt $\text{soc}(M_0) \cong \phi_3$. Auf Grund der Minimalität von M_0 gilt außerdem: $\text{head}(M_0) \cong \phi_7$. Also enthält M_0 einen Untermodul mit den Kompositionsfaktoren $\phi_2, y \cdot \phi_6, \phi_3$ (nämlich das Radikal von M_0). Weil $M_0 \downarrow_{b_{15,16,21}}$ ein Untermodul von $\varphi_{15} \oplus P(\varphi_{16})$ ist, folgt mit (6.9), dass $y \leq 1$ ist.

Wir betrachten nun den Faktormodul M_2/M_0 . Im vorliegenden Fall hat M_2/M_0 die Kompositionsfaktoren $\phi_3, x \cdot \phi_6$, und es gilt $\text{head}(M_2/M_0) \cong \phi_3$. Weil $(M_2/M_0) \downarrow_{b_{15,16,21}}$ ein Faktormodul von $\varphi_{15} \oplus P(\varphi_{16})$ ist, folgt mit (6.9), dass $x \leq 2$ ist.

Angenommen, es wäre $x = 2$ und $y = 1$. Dann enthielte M_0 einen Untermodul mit den Kompositionsfaktoren ϕ_2, ϕ_6, ϕ_3 . Wegen (6.9) und unserem Wissen über die Struktur der unzerlegbaren Moduln in $b_{15,16,21}$ wäre der einfache Modul φ_{15} ein direkter Summand des Sockels von $M_0 \downarrow_{b_{15,16,21}}$. Der Faktormodul M_2/M_0 besäße dann die Kompositionsfaktoren $\phi_3, 2\phi_6$. Wegen (6.9) und unserem Wissen über die Struktur der unzerlegbaren Moduln in $b_{15,16,21}$ wäre dann der einfache Modul φ_{15} auch ein direkter Summand des Kopfes von $(M_2/M_0) \downarrow_{b_{15,16,21}}$. Der einfache Modul φ_{15} wäre also sowohl isomorph zu einem Faktormodul von $(M_2/M_0) \downarrow_{b_{15,16,21}}$ als auch isomorph zu einem Untermodul von $M_0 \downarrow_{b_{15,16,21}}$. Da jeder zu φ_{15} isomorphe Faktormodul von $M_2 \downarrow_{b_{15,16,21}}$ ein direkter Summand von $M_2 \downarrow_{b_{15,16,21}}$ ist und jeder zu φ_{15} isomorphe Untermodul von $M_2 \downarrow_{b_{15,16,21}}$ ein direkter Summand von $M_2 \downarrow_{b_{15,16,21}}$ ist, wäre φ_{15} ein direkter Summand von $M_2 \downarrow_{b_{15,16,21}}$ mit Vielfachheit 2. Dies steht jedoch im Widerspruch zu

$$\text{soc}(M_2 \downarrow_{b_{15,16,21}}) \cong \varphi_{15} \oplus \varphi_{16}.$$

Also kann $x = 2$ und $y = 1$ nicht gleichzeitig eintreten, und es folgt:

$$a = x + y \leq 2.$$

2. Fall: ϕ_2 ist kein Kompositionsfaktor von M_0 :

Der Beweis verläuft weitgehend analog zu Fall 1. Der Untermodul M_0 hat die Kompositionsfaktoren $\phi_7, y \cdot \phi_6, \phi_3$, und wegen $\text{soc}(M_2) \cong \phi_3$ gilt $\text{soc}(M_0) \cong \phi_3$. Auf Grund der Minimalität von M_0 gilt außerdem: $\text{head}(M_0) \cong \phi_7$. Also enthält M_0 einen Untermodul mit den Kompositionsfaktoren $y \cdot \phi_6, \phi_3$ (nämlich das Radikal von M_0). Weil $M_0 \downarrow_{b_{15,16,21}}$ ein Untermodul von $\varphi_{15} \oplus P(\varphi_{16})$ ist, folgt mit (6.9), dass $y \leq 2$ ist.

Im vorliegenden Fall hat M_2/M_0 die Kompositionsfaktoren $\phi_3, \phi_2, x \cdot \phi_6$, und es gilt $\text{head}(M_2/M_0) \cong \phi_3$. Weil $(M_2/M_0) \downarrow_{b_{15,16,21}}$ ein Faktormodul von $\varphi_{15} \oplus P(\varphi_{16})$ ist, folgt mit (6.9), dass $x \leq 1$ ist.

Angenommen, es wäre $x = 1$ und $y = 2$. Dann enthielte M_0 einen Untermodul mit den Kompositionsfaktoren $2\phi_6, \phi_3$. Wegen (6.9) und unserem Wissen über die Struktur der unzerlegbaren Moduln in $b_{15,16,21}$ wäre der einfache Modul φ_{15} ein direkter Summand des Sockels von $M_0 \downarrow_{b_{15,16,21}}$. Der Faktormodul M_2/M_0 besäße dann die Kompositionsfaktoren ϕ_3, ϕ_2, ϕ_6 . Wegen (6.9) und unserem Wissen über die Struktur der unzerlegbaren Moduln in $b_{15,16,21}$ wäre dann der einfache Modul φ_{15} auch ein direkter Summand des Kopfes von $(M_2/M_0) \downarrow_{b_{15,16,21}}$. Der einfache Modul φ_{15} wäre also sowohl isomorph zu einem Faktormodul von $(M_2/M_0) \downarrow_{b_{15,16,21}}$ als auch isomorph zu einem Untermodul von $M_0 \downarrow_{b_{15,16,21}}$. Da jeder zu φ_{15} isomorphe Faktormodul von $M_2 \downarrow_{b_{15,16,21}}$ ein direkter Summand von $M_2 \downarrow_{b_{15,16,21}}$ ist und jeder zu φ_{15} isomorphe Untermodul von $M_2 \downarrow_{b_{15,16,21}}$ ein direkter Summand von $M_2 \downarrow_{b_{15,16,21}}$ ist, wäre φ_{15} ein direkter Summand von $M_2 \downarrow_{b_{15,16,21}}$ mit Vielfachheit 2. Dies steht jedoch im Widerspruch zu

$$\text{soc}(M_2 \downarrow_{b_{15,16,21}}) \cong \varphi_{15} \oplus \varphi_{16}.$$

Also kann $x = 1$ und $y = 2$ nicht gleichzeitig eintreten, und es folgt:

$$a = x + y \leq 2.$$

In jedem Fall gilt also $a \leq 2$. Aus dem Satz von Geck 6.2.2 wissen wir bereits $a \geq 1$. Angenommen, es wäre $a = 1$. Da $M = k_Q \uparrow^G$ selbstdual ist und der zu M_1 duale Modul M_1^* nicht isomorph zu M_2 ist, sind auch M_1 und M_2 selbstdual. Unter der Annahme $a = 1$ folgt aus der Selbstdualität von ϕ_2, ϕ_3, ϕ_6 und ϕ_7 , dass $M_2/\text{soc}(M_2)$ den Untermodul $\phi_2 \oplus \phi_6 \oplus \phi_7$ besitzt. Also hat $(M_2/\text{soc}(M_2)) \downarrow_{b_{15,16,21}}$ nach (6.9) und den Gleichungen auf Seite 168 mindestens drei Konstituenten im Sockel. Dies widerspricht jedoch

$$(M_2/\text{soc}(M_2)) \downarrow_{b_{15,16,21}} \cong \varphi_{15} \oplus P(\varphi_{16})/\varphi_{16},$$

weil der zweite dieser direkten Summanden uniserial ist. Also ist die Annahme $a = 1$ falsch, und es gilt: $a = 2$. Das war zu zeigen. ■

Anhang A

Tabellen

A.1 Strukturkonstanten

Es sei Φ das in Abschnitt 2.1 konstruierte Wurzelsystem vom Typ D_4 . Das Wurzelsystem Φ enthält genau 12 positive Wurzeln. Es seien r_1, r_2, r_3, r_4 die in Abschnitt 2.1 definierten einfachen Wurzeln. Die übrigen positiven Wurzeln seien wie folgt nummeriert:

$$\begin{aligned} r_5 &:= r_1 + r_2, \\ r_6 &:= r_2 + r_3, \\ r_7 &:= r_2 + r_4, \\ r_8 &:= r_1 + r_2 + r_3, \\ r_9 &:= r_1 + r_2 + r_4, \\ r_{10} &:= r_2 + r_3 + r_4, \\ r_{11} &:= r_1 + r_2 + r_3 + r_4, \\ r_{12} &:= r_1 + 2r_2 + r_3 + r_4. \end{aligned}$$

In der folgenden Tabelle sind die Strukturkonstanten N_{rs} für alle Wurzeln $r, s \in \Phi$, s positiv aufgelistet. Die Strukturkonstanten für die übrigen Wurzelpaare (r, s) , r oder s negativ, lassen sich daraus mit Hilfe von Satz 1.4.1, (a) und (c) berechnen.

Die Strukturkonstante N_{rs} befindet sich in der r -ten Zeile und s -ten Spalte. In der Tabelle sind der Übersichtlichkeit wegen Nullen durch Punkte ersetzt.

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_{12}
r_1	.	-1	.	.	.	1	1	.	.	1	.	.
r_2	1	.	1	1	.	.	.	.	.	.	1	.
r_3	.	-1	.	.	1	.	1	.	1	.	.	.
r_4	.	-1	.	.	1	1	.	1	.	.	.	.
r_5	.	.	-1	-1	.	.	.	.	.	1	.	.
r_6	-1	.	.	-1	.	.	.	.	1	.	.	.
r_7	-1	.	-1	.	.	.	.	1	.	.	.	.
r_8	.	.	.	-1	.	.	-1	.	.	.	.	.
r_9	.	.	-1	.	.	-1	.	.	.	.	.	.
r_{10}	-1	.	.	.	-1	.	.	.	.	.	.	.
r_{11}	.	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
r_{12}	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$-r_1$	.	.	.	.	-1	.	.	1	1	.	1	.
$-r_2$	.	.	.	.	1	1	1	.	.	.	.	1
$-r_3$	.	.	.	.	.	-1	.	1	.	1	1	.
$-r_4$	.	.	.	.	.	.	-1	.	1	1	1	.
$-r_5$	-1	1	.	.	.	.	.	-1	-1	.	.	1
$-r_6$	.	1	-1	.	.	.	.	-1	.	-1	.	1
$-r_7$	.	1	.	-1	.	.	.	.	-1	-1	.	1
$-r_8$	1	.	1	.	-1	-1	.	.	.	.	-1	-1
$-r_9$	1	.	.	1	-1	.	-1	.	.	.	-1	-1
$-r_{10}$	.	.	1	1	.	-1	-1	.	.	.	-1	-1
$-r_{11}$	1	.	1	1	.	.	.	-1	-1	-1	.	-1
$-r_{12}$	.	1	.	.	1	1	1	-1	-1	-1	-1	.

Tabelle A.1: Strukturkonstanten N_{rs}

A.2 Operation von $\mathbf{W}$ auf $\mathbf{T}$

Wir beschreiben die erzeugenden Elemente w_{r_i} , $i = 1, \dots, 4$ der Weylgruppe vom Typ D_4 als Elemente von $N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ durch ihre Operation auf den Toruselementen: ${}^{w_{r_i}}h(t_1, t_2, t_3, t_4)$.

w_{r_i}	${}^{w_{r_i}}h(t_1, t_2, t_3, t_4)$
w_{r_1}	$h(t_1^{-1}t_2, t_2, t_3, t_4)$
w_{r_2}	$h(t_1, t_1t_2^{-1}t_3t_4, t_3, t_4)$
w_{r_3}	$h(t_1, t_2, t_2t_3^{-1}, t_4)$
w_{r_4}	$h(t_1, t_2, t_3, t_2t_4^{-1})$

Tabelle A.2: Operation der Erzeuger von $\mathbf{W}$ auf $\mathbf{T}$

A.3 F -Konjugiertenklassen von $\mathbf{W}$

Wir beschreiben die F -Konjugiertenklassen der Weylgruppe $\mathbf{W}$ durch Angabe von Repräsentanten w_i als Worte in den Erzeugern $w_{r_1}, \dots, w_{r_4}$ und durch Angabe von Ordnung und Isomorphietyp des F -Zentralisators $\mathbf{W}_i := C_{\mathbf{W}, F}(w_i) = \{w \in \mathbf{W} | w^{-1}w_i F(w) = w_i\}$ von w_i in $\mathbf{W}$. Man beachte die gegenüber Tafel 3.6.2 in Geck [19] abweichende Wahl von w_1 .

w_i	w_i als Produkt der Erzeuger	$ \mathbf{W}_i $	Isomorphietyp von $\mathbf{W}_i$
w_0	1	12	$\mathbf{W}^F \cong D_{12}$
w_1	w_{r_2}	4	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
w_2	$w_{r_1} w_{r_3} w_{r_4}$	4	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
w_3	$w_{r_2} w_{r_1} w_{r_3} w_{r_2} w_{r_4} w_{r_2} w_{r_1} w_{r_3}$	24	$SL_2(3)$
w_4	$w_{r_1} w_{r_3} w_{r_4} w_{r_2}$	24	$SL_2(3)$
w_5	$w_{r_1} w_{r_2}$	4	$\mathbb{Z}_4$
w_6	$w_{r_1} w_{r_2} w_{r_1} w_{r_3} w_{r_2} w_{r_1} w_{r_4} w_{r_2} w_{r_1} w_{r_3} w_{r_2} w_{r_4}$	12	D_{12}

Tabelle A.3: F -Konjugiertenklassen von $\mathbf{W}$

A.4 Maximale Tori von ${}^3D_4(q)$, q ungerade

In der folgenden Tabelle sind die maximalen Tori $\mathbf{T}_i^F := \mathbf{T}^{(Fw_i^{-1})}$ von $\mathbf{G}^F = {}^3D_4(q)$ für ungerades q aufgelistet. Wir geben die Elemente in $\mathbf{T}_i^F$ sowie den Isomorphietyp von $\mathbf{T}_i^F$ an. Vergleiche Tafel 3.6.2 in Geck [19].

Torus	$\mathbf{T}_i^F$	Isomorphietyp
$\mathbf{T}_0^F$	$\{h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2}) \mid t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1\}$	$\mathbb{Z}_{q^3-1} \times \mathbb{Z}_{q-1}$
$\mathbf{T}_1^F$	$\{h(t^{q^2+q}, t^{q^2+q+1}, t^{q^3+q^2}, t^{q+1}) \mid t^{(q^3-1)(q+1)} = 1\}$	$\mathbb{Z}_{(q^3-1)(q+1)}$
$\mathbf{T}_2^F$	$\{h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2}) \mid t^{(q^3+1)(q-1)} = 1\}$	$\mathbb{Z}_{(q^3+1)(q-1)}$
$\mathbf{T}_3^F$	$\{h(t_1, t_2, t_1^q t_2, (t_1^{-1} t_2)^{q+1}) \mid t_i^{q^2+q+1} = 1\}$	$\mathbb{Z}_{q^2+q+1} \times \mathbb{Z}_{q^2+q+1}$
$\mathbf{T}_4^F$	$\{h(t_1, t_2, t_1^{-q} t_2, (t_1 t_2^{-1})^{q-1}) \mid t_i^{q^2-q+1} = 1\}$	$\mathbb{Z}_{q^2-q+1} \times \mathbb{Z}_{q^2-q+1}$
$\mathbf{T}_5^F$	$\{h(t, t^{q^3+1}, t^q, t^{q^2}) \mid t^{q^4-q^2+1} = 1\}$	$\mathbb{Z}_{q^4-q^2+1}$
$\mathbf{T}_6^F$	$\{h(t_1, t_2, t_1^{-q}, t_1^{q^2}) \mid t_1^{q^3+1} = t_2^{q+1} = 1\}$	$\mathbb{Z}_{q^3+1} \times \mathbb{Z}_{q+1}$

Tabelle A.4: Maximale Tori von $\mathbf{G}^F$

A.5 Halbeinfache Klassen von ${}^3D_4(q)$, q ungerade

In der folgenden Tabelle sind für jeden halbeinfachen Klassentyp h_i von $\mathbf{G}^F = {}^3D_4(q)$ für ungerades q Vertreter für die zugehörigen halbeinfachen Konjugiertenklassen angegeben. Wir geben außerdem die Anzahl der halbeinfachen Konjugiertenklassen in h_i an. Vergleiche Tafel 3.6.3 in Geck [19].

Typ	Repräsentant	Anzahl
h_1	$h(1, 1, 1, 1) = 1$	1
h_2	$h(-1, 1, -1, -1)$	1
h_3	$h(t, t^2, t, t)$ $t^{q-1} = 1; t^2 \neq 1$	$\frac{q-3}{2}$
h_4	$h(t, 1, t^q, t^{q^2})$ $t^{q^2+q+1} = 1; t \neq 1$	$\frac{q^2+q}{2}$
h_5	$h(t, 1, t^q, t^{q^2})$ $t^{q^3-1} = 1, t^{q^2+q+1} \neq 1, t^2 \neq 1$	$\frac{q^3-q^2-q-3}{2}$
h_6	$h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})$ $t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1; t_1 \neq 1, t_2; t_2 \neq 1, t_1^2; t_1^{q^2+q+1} \neq t_2, t_2^2$	$\frac{q^4-4q^3+2q^2-2q+15}{12}$
h_7	$h(1, t, 1, 1)$ $t^{q+1} = 1; t^2 \neq 1$	$\frac{q-1}{2}$
h_8	$h(t^{q^2+q}, t^{q^2+q+1}, t^{q^3+q^2}, t^{q+1})$ $t^{(q^3-1)(q+1)} = 1, t^{q^3-1} \neq 1, t^{q+1} \neq 1$	$\frac{q^4-2q+1}{4}$
h_9	$h(t, 1, t^{-q}, t^{q-1})$ $t^{q^2-q+1} = 1; t \neq 1$	$\frac{q^2-q}{2}$
h_{10}	$h(t, 1, t^{-q}, t^{q^2})$ $t^{q^3+1} = 1, t^{q^2-q+1} \neq 1, t^2 \neq 1$	$\frac{q^3-q^2+q-1}{2}$
h_{11}	$h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2})$ $t^{(q^3+1)(q-1)} = 1, t^{q^3+1} \neq 1, t^{q-1} \neq 1$	$\frac{q^4-2q^3+1}{4}$
h_{12}	$h(t_1, t_2, t_1^q t_2, (t_1^{-1} t_2)^{q+1})$ $t_i^{q^2+q+1} = 1, t_1^2 \neq t_2, t_2^{1-q^2}; t_2 \neq 1, t_1^{-2q}$	$\frac{q^4+2q^3-q^2-2q}{24}$
h_{13}	$h(t_1, t_2, t_1^{-q} t_2, (t_1 t_2^{-1})^{q-1})$ $t_i^{q^2-q+1} = 1; t_1^2 \neq t_2, t_2^{1-q^2}; t_2 \neq 1, t_1^{2q}$	$\frac{q^4-2q^3-q^2+2q}{24}$
h_{14}	$h(t, t^{q^3+1}, t^q, t^{q^2})$ $t^{q^4-q^2+1} = 1; t \neq 1$	$\frac{q^4-q^2}{4}$
h_{15}	$h(t_1, t_2, t_1^{-q}, t_1^{q^2})$ $t_1^{q^3+1} = t_2^{q+1} = 1; t_2 \neq t_1, t_1^2; t_1, t_2 \neq 1; t_1^{q^2-q+1} \neq t_2, t_2^2$	$\frac{q^4-2q^3+2q^2-4q+3}{12}$

Tabelle A.5: Halbeinfache Konjugiertenklassen von ${}^3D_4(q)$ für ungerades q

A.6 Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von ${}^3D_4(q)$, q ungerade

In der folgenden Tabelle werden für jeden halbeinfachen Klassentyp h_i von $\mathbf{G}^F = {}^3D_4(q)$ für ungerades q Vertreter der zu h_i gehörenden halbeinfachen Konjugiertenklassen angegeben. Es sei c das multiplikativ Inverse von $q^2 + q - 1$ modulo $(q^3 - 1)(q + 1)$. Da die beiden halbeinfachen Klassentypen h_1 und h_2 jeweils nur genau eine Konjugiertenklasse enthalten, dürfte es wohl nicht zu Missverständnissen führen, dass wir in diesen beiden Fällen sowohl den halbeinfachen Klassentyp als auch die von uns gewählten Vertreter der Konjugiertenklassen mit h_1 bzw. h_2 bezeichnen.

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$h_1 := h(1, 1, 1, 1)$		1
$h_2 := h(-1, 1, -1, -1)$		1
$h_3(i) := h(\tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_1^{2i}, \tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_1^i)$	$i = 0, \dots, q - 2$ $i \neq 0, \frac{q-1}{2}$	$\frac{q-3}{2}$
$h_4(i) := h(\tilde{\varphi}_3^i, 1, \tilde{\varphi}_3^{qi}, \tilde{\varphi}_3^{q^2i})$	$i = 0, \dots, q^2 + q$ $i \neq 0$	$\frac{q^2+q}{2}$
$h_5(i) := h(\tilde{\zeta}_3^i, 1, \tilde{\zeta}_3^{qi}, \tilde{\zeta}_3^{q^2i})$	$i = 0, \dots, q^3 - 2$ $i \neq (q-1)l, l = 0, \dots, q^2 + q + 1$ $i \neq \frac{q^3-1}{2}$	$\frac{q^3 - q^2 - q - 3}{2}$
$h_6(i, j) := h(\tilde{\zeta}_3^i, \tilde{\zeta}_1^j, \tilde{\zeta}_3^{qi}, \tilde{\zeta}_3^{q^2i})$	$i = 0, \dots, q^3 - 2$ $j = 0, \dots, q - 2$ $i \neq 0$ $j \neq 0$ $i \neq (q^2 + q + 1)l$ oder $j \neq l, l = 0, \dots, q - 2$ $i \neq (q^2 + q + 1)l$ oder $j \neq 2l, l = 0, \dots, q - 2$ $i \neq j + (q-1)l, l = 0, \dots, q^2 + q$ $i \neq 2j + (q-1)l, l = 0, \dots, q^2 + q$	$\frac{q^4 - 4q^3 + 2q^2 - 2q + 15}{12}$
$h_7(i) := h(1, \tilde{\xi}_1^{ci}, 1, 1)$	$i = 0, \dots, q$ $i \neq 0, \frac{q+1}{2}$	$\frac{q-1}{2}$
$h_8(i) := h(\tilde{\mu}_3^{(q^2+q)ci}, \tilde{\mu}_3^{(q^2+q+1)ci}, \tilde{\mu}_3^{(q^3+q^2)ci}, \tilde{\mu}_3^{(q+1)ci})$	$i = 0, \dots, q^4 + q^3 - q - 2$ $i \neq (q+1)l, l = 0, \dots, q^3 - 2$ $i \neq (q^3 - 1)l, l = 0, \dots, q$	$\frac{q^4 - 2q + 1}{4}$
$h_9(i) := h(\tilde{\varphi}_6^i, 1, \tilde{\varphi}_6^{-qi}, \tilde{\varphi}_6^{(q-1)i})$	$i = 0, \dots, q^2 - q$ $i \neq 0$	$\frac{q^2 - q}{2}$

Fortsetzung

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$h_{10}(i) := h(\tilde{\xi}_3^i, 1, \tilde{\xi}_3^{-q^i}, \tilde{\xi}_3^{q^2 i})$	$i = 0, \dots, q^3$ $i \neq 0, \frac{q^3+1}{2}$ $i \neq (q+1)l, l = 0, \dots, q^2 - q$	$\frac{q^3 - q^2 + q - 1}{2}$
$h_{11}(i) := h(\tilde{\eta}_3^i, \tilde{\eta}_3^{(q^3+1)i}, \tilde{\eta}_3^{q^4 i}, \tilde{\eta}_3^{q^2 i})$	$i = 0, \dots, q^4 - q^3 + q - 2$ $i \neq (q-1)l, l = 0, \dots, q^3$ $i \neq (q^3+1)l, l = 0, \dots, q-2$	$\frac{q^4 - 2q^3 + 1}{4}$
$h_{12}(i, j) := h(\tilde{\varphi}_3^i, \tilde{\varphi}_3^j, \tilde{\varphi}_3^{q^i+j}, \tilde{\varphi}_3^{(q+1)(j-i)})$	$i = 0, \dots, q^2 + q$ $j = 0, \dots, q^2 + q$ $j \neq 0, -2qi$ $2i \neq j, (1 - q^2)j$	$\frac{q^4 + 2q^3 - q^2 - 2q}{24}$
$h_{13}(i, j) := h(\tilde{\varphi}_6^i, \tilde{\varphi}_6^j, \tilde{\varphi}_6^{-q^i+j}, \tilde{\varphi}_6^{(q-1)(i-j)})$	$i = 0, \dots, q^2 - q$ $j = 0, \dots, q^2 - q$ $j \neq 0, 2qi$ $2i \neq j, (1 - q^2)j$	$\frac{q^4 - 2q^3 - q^2 + 2q}{24}$
$h_{14}(i) := h(\tilde{\varphi}_{12}^i, \tilde{\varphi}_{12}^{(q^3+1)i}, \tilde{\varphi}_{12}^{q^i}, \tilde{\varphi}_{12}^{q^2 i})$	$i = 0, \dots, q^4 - q^2$ $i \neq 0$	$\frac{q^4 - q^2}{4}$
$h_{15}(i, j) := h(\tilde{\zeta}_3^i, \tilde{\zeta}_1^j, \tilde{\zeta}_3^{-q^i}, \tilde{\zeta}_3^{q^2 i})$	$i = 0, \dots, q^3$ $j = 0, \dots, q$ $i \neq 0$ $j \neq 0$ $i \neq (q^2 - q + 1)l \text{ oder } j \neq l, l = 0, \dots, q$ $i \neq (q^2 - q + 1)l \text{ oder } j \neq 2l, l = 0, \dots, q$ $i \neq j + (q+1)l, l = 0, \dots, q^2 - q$ $i \neq 2j + (q+1)l, l = 0, \dots, q^2 - q$	$\frac{q^4 - 2q^3 + 2q^2 - 4q + 3}{12}$

Tabelle A.6: Repräsentanten der halbeinfachen Klassen von ${}^3D_4(q)$, q ungerade

A.7 Die Konjugiertenklassen von ${}^3D_4(q)$, q ungerade

Die folgende Tabelle enthält eine vollständige Auflistung der Konjugiertenklassen von $\mathbf{G}^F = {}^3D_4(q)$ für ungerades q . Zur Wahl der Bezeichnungen der Konjugiertenklassen vergleiche man den Unterabschnitt „Gemischte Klassen“ in Abschnitt 3.1. In der Tabelle A.7 sind $\zeta \in \mathbb{F}$ ein Nichtquadrat mit $\zeta^q = \zeta$, $a \in \mathbb{F}$ mit $a^{q^3} = a$, $a^q \neq a$, ferner $s \in \mathbb{F}$ eine primitive $2(q^2 - 1)$ -te Einheitswurzel und $r \in \mathbb{F}$ eine Nullstelle des Polynoms $X^q - X + s^{q+1}$.

Name	Repräsentant	$ C_{{}^3D_4(q)} $
$c_{1,0}$	1	$q^{12}(q^6 - 1)^2(q^4 - q^2 + 1)$
$c_{1,1}$	$x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q^{12}(q^6 - 1)$
$c_{1,2}$	$x_\alpha(1)$	$q^{10}(q^2 - 1)$
$c_{1,3}$	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(-1)$	$2q^8(q^2 + q + 1)$
$c_{1,4}$	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(-\zeta)$	$2q^8(q^2 - q + 1)$
$c_{1,5}$	$x_\alpha(1)x_{\alpha+\beta}(a)$	q^6
$c_{1,6}$	$x_\alpha(1)x_\beta(1)$	q^4
$c_{2,0}$	h_2	$q^4(q^6 - 1)(q^2 - 1)$
$c_{2,1}$	$h_2x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q^4(q^6 - 1)$
$c_{2,2}$	$h_2x_\alpha(1)$	$q^4(q^2 - 1)$
$c_{2,3}$	$h_2x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(-1)$	$2q^4$
$c_{2,4}$	$h_2x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(-\zeta)$	$2q^4$
$c_{3,0}$	h_3	$q^3(q^6 - 1)(q - 1)$
$c_{3,1}$	$h_3x_\alpha(1)$	$q^3(q - 1)$
$c_{4,0}$	h_4	$q^3(q^3 - 1)^2(q + 1)$
$c_{4,1}$	$h_4x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q^3(q^3 - 1)$
$c_{4,2}$	$h_4x_\beta(1)x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q^2(q^2 + q + 1)$
$c_{5,0}$	h_5	$q(q^3 - 1)(q^2 - 1)$
$c_{5,1}$	$h_5x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q(q^3 - 1)$
$c_{6,0}$	h_6	$(q^3 - 1)(q - 1)$

Fortsetzung

Name	Repräsentant	$ C_{^3D_4(q)} $
$c_{7,0}$ $c_{7,1}$	h_7 $h_7 x_{2\alpha+\beta}(1)$	$q^3(q^6 - 1)(q + 1)$ $q^3(q + 1)$
$c_{8,0}$	h_8	$(q^3 - 1)(q + 1)$
$c_{9,0}$ $c_{9,1}$ $c_{9,2}$	h_9 $h_9 x_{3\alpha+2\beta}(1)$ $h_9 x_\beta(s) x_{3\alpha+\beta}(s^q) x_{3\alpha+2\beta}(r)$	$q^3(q^3 + 1)^2(q - 1)$ $q^3(q^3 + 1)$ $q^2(q^2 - q + 1)$
$c_{10,0}$ $c_{10,1}$	h_{10} $h_{10} x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q(q^3 + 1)(q^2 - 1)$ $q(q^3 + 1)$
$c_{11,0}$	h_{11}	$(q^3 + 1)(q - 1)$
$c_{12,0}$	h_{12}	$(q^2 + q + 1)^2$
$c_{13,0}$	h_{13}	$(q^2 - q + 1)^2$
$c_{14,0}$	h_{14}	$q^4 - q^2 + 1$
$c_{15,0}$	h_{15}	$(q^3 + 1)(q + 1)$

Tabelle A.7: Liste der Konjugiertenklassen und Zentralisatorordnungen von $^3D_4(q)$ für ungerades q

A.8 Halbeinfache Klassen von B

In der folgenden Tabelle sind für jeden halbeinfachen Klassentyp h_i von $B = \mathbf{B}^F$ Vertreter für die zugehörigen halbeinfachen Konjugiertenklassen angegeben. Wir geben außerdem die Anzahl der halbeinfachen Konjugiertenklassen in h_i an.

Typ	Repräsentant	Anzahl
h_1	$h(1, 1, 1, 1) = 1$	1
h_2	$h(-1, 1, -1, -1)$	1
h_3	$h(-1, -1, -1, -1)$	1
h_4	$h(1, -1, 1, 1)$	1
h_5	$h(t, 1, t^q, t^{q^2})$ $t^{q^2+q+1} = 1, t \neq 1$	$q^2 + q$
h_6	$h(t, t^2, t, t)$ $t^{q-1} = 1, t^2 \neq 1$	$q - 3$
h_7	$h(t, t, t, t)$ $t^{q-1} = 1, t^2 \neq 1$	$q - 3$
h_8	$h(1, t, 1, 1)$ $t^{q-1} = 1, t^2 \neq 1$	$q - 3$
h_9	$h(t^2, t^{q^2+q+1}, t^{2q}, t^{2q^2})$ $t^{q^3-1} = 1, t^{q^2+q+1} \neq 1, t^2 \neq 1$	$q^3 - q^2 - q - 3$
h_{10}	$h(t, t^{q^2+q+1}, t^q, t^{q^2})$ $t^{q^3-1} = 1, t^{q^2+q+1} \neq 1, t^2 \neq 1$	$q^3 - q^2 - q - 3$
h_{11}	$h(t, 1, t^q, t^{q^2})$ $t^{q^3-1} = 1, t^{q^2+q+1} \neq 1, t^2 \neq 1$	$q^3 - q^2 - q - 3$
h_{12}	$h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})$ $t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1; t_1 \neq 1, t_2; t_2 \neq 1, t_1^2; t_1^{q^2+q+1} \neq t_2, t_2^2$	$q^4 - 4q^3 + 2q^2 - 2q + 15$

Tabelle A.8: Halbeinfache Konjugiertenklassen von B

A.9 Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von B

In der folgenden Tabelle werden für jeden halbeinfachen Klassentyp h_i von $B = \mathbf{B}^F$ Vertreter der zu h_i gehörenden halbeinfachen Konjugiertenklassen angegeben. Da die halbeinfachen Klassentypen $h_1, \dots, h_4$ jeweils nur genau eine Konjugiertenklasse enthalten, dürfte es wohl nicht zu Missverständnissen führen, dass wir in diesen Fällen sowohl den halbeinfachen Klassentyp als auch die von uns gewählten Vertreter der Konjugiertenklassen mit $h_1, \dots, h_4$ bezeichnen.

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$h_1 := h(1, 1, 1, 1)$		1
$h_2 := h(-1, 1, -1, -1)$		1
$h_3 := h(-1, -1, -1, -1)$		1
$h_4 := h(1, -1, 1, 1)$		1
$h_5(i) := h(\tilde{\varphi}_3^i, 1, \tilde{\varphi}_3^{q^i}, \tilde{\varphi}_3^{q^{2i}})$	$i = 0, \dots, q^2 + q$ $i \neq 0$	$q^2 + q$
$h_6(i) := h(\tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_1^{2i}, \tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_1^i)$	$i = 0, \dots, q - 2$ $i \neq 0, \frac{q-1}{2}$	$q - 3$
$h_7(i) := h(\tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_1^i)$	$i = 0, \dots, q - 2$ $i \neq 0, \frac{q-1}{2}$	$q - 3$
$h_8(i) := h(1, \tilde{\zeta}_1^i, 1, 1)$	$i = 0, \dots, q - 2$ $i \neq 0, \frac{q-1}{2}$	$q - 3$
$h_9(i) := h(\tilde{\zeta}_3^{2i}, \tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_3^{2q^i}, \tilde{\zeta}_3^{2q^{2i}})$	$i = 0, \dots, q^3 - 2$ $i \neq (q-1)l, l = 0, \dots, q^2 + q + 1$ $i \neq \frac{q^3-1}{2}$	$q^3 - q^2 - q - 3$
$h_{10}(i) := h(\tilde{\zeta}_3^i, \tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_3^{q^i}, \tilde{\zeta}_3^{q^{2i}})$	$i = 0, \dots, q^3 - 2$ $i \neq (q-1)l, l = 0, \dots, q^2 + q + 1$ $i \neq \frac{q^3-1}{2}$	$q^3 - q^2 - q - 3$

Fortsetzung

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$h_{11}(i) := h(\tilde{\zeta}_3^i, 1, \tilde{\zeta}_3^{qi}, \tilde{\zeta}_3^{q^2 i})$	$i = 0, \dots, q^3 - 2$ $i \neq (q-1)l, \quad l = 0, \dots, q^2 + q + 1$ $i \neq \frac{q^3-1}{2}$	$q^3 - q^2 - q - 3$
$h_{12}(i, j) := h(\tilde{\zeta}_3^i, \tilde{\zeta}_3^j, \tilde{\zeta}_3^{qi}, \tilde{\zeta}_3^{q^2 i})$	$i = 0, \dots, q^3 - 2$ $j = 0, \dots, q - 2$ $i \neq 0$ $j \neq 0$ $i \neq (q^2 + q + 1)l \text{ oder } j \neq l, \quad l = 0, \dots, q - 2$ $i \neq (q^2 + q + 1)l \text{ oder } j \neq 2l, \quad l = 0, \dots, q - 2$ $i \neq j + (q-1)l, \quad l = 0, \dots, q^2 + q$ $i \neq 2j + (q-1)l, \quad l = 0, \dots, q^2 + q$	$q^4 - 4q^3 + 2q^2 - 2q + 15$

Tabelle A.9: Repräsentanten der halbeinfachen Klassen von B

A.10 Unipotente Klassen von B

In der folgenden Tabelle sind Informationen über die unipotenten Konjugiertenklassen von $B = \mathbf{B}^F$ zusammengestellt. Für jede unipotente Konjugiertenklasse von $\mathbf{B}^F$ geben wir die in der vorliegenden Arbeit gewählte Bezeichnung $c_{i,j}$ und die zugehörige Bezeichnung in Geck [19], Repräsentanten der mit $c_{i,j}$ bezeichneten Klassen, die Anzahl dieser Klassen sowie die Zentralisatorordnung an. Zur Wahl der Parameter i, a', b, ζ sei auf den Unterabschnitt „Unipotente Klassen“ in Abschnitt 3.2 verwiesen. Vergleiche auch Tafel 3.8.3 in Geck [19].

Bezeichnung	Bezeichnung in Geck [19]	Repräsentant u	Anzahl	$ C_B(u) $
$c_{1,0}$	B_1	1	1	$q^{12}(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{1,1}$	B_2	$x_{3\alpha+2\beta}(1)$	1	$q^{12}(q^3 - 1)$
$c_{1,2}$	B_3	$x_{3\alpha+\beta}(1)$	1	$q^{11}(q^3 - 1)$
$c_{1,3}$	B_4	$x_\beta(1)$	1	$q^8(q^3 - 1)$
$c_{1,4}$	B_5	$x_{2\alpha+\beta}(1)$	1	$q^{10}(q - 1)$
$c_{1,5}$	B_6	$x_{\alpha+\beta}(1)$	1	$q^8(q - 1)$
$c_{1,6}$	B_7	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(2)$	1	q^8
$c_{1,7}$	B_8	$x_\alpha(1)$	1	$q^7(q - 1)$
$c_{1,8}$	B_9	$x_\beta(1)x_{3\alpha+\beta}(1)$	1	$q^8(q^2 + q + 1)$
$c_{1,9}$	B_{10}	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(-1)$	1	$2q^8$
$c_{1,10}$	B_{11}	$x_{\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(1)$	1	$2q^8$
$c_{1,11}$	B_{12}	$x_\alpha(1)x_{3\alpha+2\beta}(-1)$	1	$2q^7$
$c_{1,12}$	$B_{13}^{(i,b)}$	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(\zeta^i)x_{3\alpha+\beta}(b)$	$\frac{q-3}{2}$	q^8
$c_{1,13}$	B_{14}	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(-\zeta)$	1	$2q^8$
$c_{1,14}$	B_{15}	$x_{\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(\zeta)$	1	$2q^8$
$c_{1,15}$	B_{16}	$x_\alpha(1)x_{3\alpha+2\beta}(-\zeta)$	1	$2q^7$
$c_{1,16}$	$B_{17}^{(i,b)}$	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(\zeta^i)x_{3\alpha+\beta}(b)$	$\frac{q-1}{2}$	q^8
$c_{1,17}$	$B_{18}^{(a')}$	$x_\alpha(1)x_{\alpha+\beta}(a')$	$q + 1$	q^6
$c_{1,18}$	B_{19}	$x_\alpha(1)x_\beta(1)$	1	q^4

Tabelle A.10: Unipotente Konjugiertenklassen von B

A.11 Die Konjugiertenklassen von B

Die folgende Tabelle enthält eine vollständige Auflistung der Konjugiertenklassen von $B = \mathbf{B}^F$. Zur Wahl der Bezeichnungen der Konjugiertenklassen vergleiche man den Unterabschnitt „Gemischte Klassen“ in Abschnitt 3.2. In der Tabelle A.11 ist $\zeta \in \mathbb{F}$ ein Nichtquadrat mit $\zeta^q = \zeta$. Die Parameter (i, b) in den Repräsentanten der unipotenten Klassen vom Typ $c_{1,12}$ bzw. $c_{1,16}$ durchlaufen die Parametermengen I_1 bzw. I_2 mit $|I_1| = \frac{q-3}{2}$ bzw. $|I_2| = \frac{q-1}{2}$ wie sie im Unterabschnitt „Unipotente Klassen“ in Abschnitt 3.2 definiert sind. Der Parameter a' in den Repräsentanten der unipotenten Klassen vom Typ $c_{1,17}$ durchläuft die Parametermenge I_3 mit $|I_3| = q + 1$, die ebenfalls im Unterabschnitt „Unipotente Klassen“ in Abschnitt 3.2 definiert ist.

Name	Repräsentant	$ C_{\mathbf{B}^F} $
$c_{1,0}$	1	$q^{12}(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{1,1}$	$x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q^{12}(q^3 - 1)$
$c_{1,2}$	$x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q^{11}(q^3 - 1)$
$c_{1,3}$	$x_\beta(1)$	$q^8(q^3 - 1)$
$c_{1,4}$	$x_{2\alpha+\beta}(1)$	$q^{10}(q - 1)$
$c_{1,5}$	$x_{\alpha+\beta}(1)$	$q^8(q - 1)$
$c_{1,6}$	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(2)$	q^8
$c_{1,7}$	$x_\alpha(1)$	$q^7(q - 1)$
$c_{1,8}$	$x_\beta(1)x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q^8(q^2 + q + 1)$
$c_{1,9}$	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(-1)$	$2q^8$
$c_{1,10}$	$x_{\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(1)$	$2q^8$
$c_{1,11}$	$x_\alpha(1)x_{3\alpha+2\beta}(-1)$	$2q^7$
$c_{1,12}$	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(\zeta^i)x_{3\alpha+\beta}(b)$	q^8
$c_{1,13}$	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(-\zeta)$	$2q^8$
$c_{1,14}$	$x_{\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(\zeta)$	$2q^8$
$c_{1,15}$	$x_\alpha(1)x_{3\alpha+2\beta}(-\zeta)$	$2q^7$
$c_{1,16}$	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(\zeta^i)x_{3\alpha+\beta}(b)$	q^8
$c_{1,17}$	$x_\alpha(1)x_{\alpha+\beta}(a')$	q^6
$c_{1,18}$	$x_\alpha(1)x_\beta(1)$	q^4
$c_{2,0}$	h_2	$q^4(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{2,1}$	$h_2x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q^4(q^3 - 1)$
$c_{2,2}$	$h_2x_\alpha(1)$	$q^4(q - 1)$
$c_{2,3}$	$h_2x_\alpha(1)x_{3\alpha+2\beta}(-1)$	$2q^4$
$c_{2,4}$	$h_2x_\alpha(1)x_{3\alpha+2\beta}(-\zeta)$	$2q^4$

Fortsetzung

Name	Repräsentant	$ C_{\mathbf{B}^F} $
$c_{3,0}$	h_3	$q^4(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{3,1}$	$h_3x_{\alpha+\beta}(1)$	$q^4(q - 1)$
$c_{3,2}$	$h_3x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q^4(q^3 - 1)$
$c_{3,3}$	$h_3x_{\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(1)$	$2q^4$
$c_{3,4}$	$h_3x_{\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(\zeta)$	$2q^4$
$c_{4,0}$	h_4	$q^4(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{4,1}$	$h_4x_\beta(1)$	$q^4(q^3 - 1)$
$c_{4,2}$	$h_4x_{2\alpha+\beta}(1)$	$q^4(q - 1)$
$c_{4,3}$	$h_4x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(-1)$	$2q^4$
$c_{4,4}$	$h_4x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(-\zeta)$	$2q^4$
$c_{5,0}$	h_5	$q^3(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{5,1}$	$h_5x_\beta(1)$	$q^2(q^3 - 1)$
$c_{5,2}$	$h_5x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q^2(q^3 - 1)$
$c_{5,3}$	$h_5x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q^3(q^3 - 1)$
$c_{5,4}$	$h_5x_\beta(1)x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q^2(q^2 + q + 1)$
$c_{6,0}$	h_6	$q^3(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{6,1}$	$h_6x_\alpha(1)$	$q^3(q - 1)$
$c_{7,0}$	h_7	$q^3(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{7,1}$	$h_7x_{\alpha+\beta}(1)$	$q^3(q - 1)$
$c_{8,0}$	h_8	$q^3(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{8,1}$	$h_8x_{2\alpha+\beta}(1)$	$q^3(q - 1)$
$c_{9,0}$	h_9	$q(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{9,1}$	$h_9x_\beta(1)$	$q(q^3 - 1)$
$c_{10,0}$	h_{10}	$q(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{10,1}$	$h_{10}x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q(q^3 - 1)$
$c_{11,0}$	h_{11}	$q(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{11,1}$	$h_{11}x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q(q^3 - 1)$
$c_{12,0}$	h_{12}	$(q^3 - 1)(q - 1)$

Tabelle A.11: Liste der Konjugiertenklassen und Zentralisatorordnungen von B

A.12 Fusionen der Konjugiertenklassen von B in ${}^3D_4(q)$

Die $c_{i,j}$ in der linken Spalte der folgenden Tabelle bezeichnen Klassentypen von $B = \mathbf{B}^F$, die in der rechten Spalte Klassentypen von ${}^3D_4(q) = \mathbf{G}^F$.

Konjugiertenklasse von B	Konjugiertenklasse von ${}^3D_4(q)$
$c_{1,0}$	$c_{1,0}$
$c_{1,1}$	$c_{1,1}$
$c_{1,2}$	$c_{1,1}$
$c_{1,3}$	$c_{1,1}$
$c_{1,4}$	$c_{1,2}$
$c_{1,5}$	$c_{1,2}$
$c_{1,6}$	$c_{1,2}$
$c_{1,7}$	$c_{1,2}$
$c_{1,8}$	$c_{1,3}$
$c_{1,9}$	$c_{1,3}$
$c_{1,10}$	$c_{1,3}$
$c_{1,11}$	$c_{1,3}$
$c_{1,12}(i, b)$	$c_{1,3}$
$c_{1,13}$	$c_{1,4}$
$c_{1,14}$	$c_{1,4}$
$c_{1,15}$	$c_{1,4}$
$c_{1,16}(i, b)$	$c_{1,4}$
$c_{1,17}(a')$	$c_{1,5}$
$c_{1,18}$	$c_{1,6}$
$c_{2,0}$	$c_{2,0}$
$c_{2,1}$	$c_{2,1}$
$c_{2,2}$	$c_{2,2}$
$c_{2,3}$	$c_{2,3}$
$c_{2,4}$	$c_{2,4}$

Fortsetzung

Konjugiertenklasse von B	Konjugiertenklasse von ${}^3D_4(q)$
$c_{3,0}$ $c_{3,1}$ $c_{3,2}$ $c_{3,3}$ $c_{3,4}$	$c_{2,0}$ $c_{2,2}$ $c_{2,1}$ $c_{2,3}$ $c_{2,4}$
$c_{4,0}$ $c_{4,1}$ $c_{4,2}$ $c_{4,3}$ $c_{4,4}$	$c_{2,0}$ $c_{2,1}$ $c_{2,2}$ $c_{2,3}$ $c_{2,4}$
$c_{5,0}(i)$ $c_{5,1}(i)$ $c_{5,2}(i)$ $c_{5,3}(i)$ $c_{5,4}(i)$	$c_{4,0}(i)$ $c_{4,1}(i)$ $c_{4,1}(i)$ $c_{4,1}(i)$ $c_{4,2}(i)$
$c_{6,0}(i)$ $c_{6,1}(i)$	$c_{3,0}(i)$ $c_{3,1}(i)$
$c_{7,0}(i)$ $c_{7,1}(i)$	$c_{3,0}(i)$ $c_{3,1}(i)$
$c_{8,0}(i)$ $c_{8,1}(i)$	$c_{3,0}(i)$ $c_{3,1}(i)$
$c_{9,0}(i)$ $c_{9,1}(i)$	$c_{5,0}((q^2 + q - 1)i)$ $c_{5,1}((q^2 + q - 1)i)$
$c_{10,0}(i)$ $c_{10,1}(i)$	$c_{5,0}(i)$ $c_{5,1}(i)$
$c_{11,0}(i)$ $c_{11,1}(i)$	$c_{5,0}(i)$ $c_{5,1}(i)$
$c_{12,0}(i, j)$	$c_{6,0}(i, j)$

Tabelle A.12: Fusionen der Konjugiertenklassen von B in ${}^3D_4(q)$

A.13 F -Konjugiertenklassen von $\mathbf{W}_{\mathbf{L}_P}$

Wir beschreiben die F -Konjugiertenklassen der Weylgruppe $\mathbf{W}_{\mathbf{L}_P}$ der Levi-Untergruppe $\mathbf{L}_P$ durch Angabe von Repräsentanten w_i als Worte in den Erzeugern w_{r_1} , w_{r_3} und w_{r_4} und durch Angabe von Ordnung und Isomorphietyp des F -Zentralisators $\mathbf{W}_i \cap \mathbf{W}_{\mathbf{L}_P}$ ($\mathbf{W}_i$ wie in Tabelle A.3). Wir bezeichnen die Repräsentanten der F -Klassen von $\mathbf{W}_{\mathbf{L}_P}$ mit w_0 bzw. w_2 , weil sie mit den Repräsentanten w_0 bzw. w_2 der F -Klassen von $\mathbf{W}$ aus Tabelle A.3 übereinstimmen.

w_i	w_i als Produkt der Erzeuger	$ \mathbf{W}_i $	Isomorphietyp von $\mathbf{W}_i \cap \mathbf{W}_{\mathbf{L}_P}$
w_0	1	2	$(\mathbf{W}_{\mathbf{L}_P})^F \cong \mathbb{Z}_2$
w_2	$w_{r_1} w_{r_3} w_{r_4}$	2	$\mathbb{Z}_2$

Tabelle A.13: F -Konjugiertenklassen von $\mathbf{W}_{\mathbf{L}_P}$

A.14 Maximale Tori von L_P

In der folgenden Tabelle sind die maximalen Tori $\mathbf{T}_i^F$ von $L_P = (\mathbf{L}_P)^F$ aufgelistet ($i = 0, 2$). Wir geben die Elemente in $\mathbf{T}_i^F$ sowie den Isomorphietyp von $\mathbf{T}_i^F$ an. Vergleiche auch Tabelle A.4.

Torus	$\mathbf{T}_i^F$	Isomorphietyp
$\mathbf{T}_0^F$	$\{h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2}) \mid t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1\}$	$\mathbb{Z}_{q^3-1} \times \mathbb{Z}_{q-1}$
$\mathbf{T}_2^F$	$\{h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2}) \mid t^{(q^3+1)(q-1)} = 1\}$	$\mathbb{Z}_{(q^3+1)(q-1)}$

Tabelle A.14: Maximale Tori von L_P

A.15 Halbeinfache Klassen von L_P

In der folgenden Tabelle sind für jeden halbeinfachen Klassentyp h_i von L_P Vertreter für die zugehörigen halbeinfachen Konjugiertenklassen angegeben. Wir geben außerdem die Anzahl der halbeinfachen Konjugiertenklassen in h_i an.

Typ	Repräsentant	Anzahl
h_1	$h(t, t^2, t, t)$ $t^{q-1} = 1$	$q - 1$
h_2	$h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})$ $t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1; t_2 \neq t_1^2$	$\frac{(q^3-2)(q-1)}{2}$
h_3	$h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2})$ $t^{(q^3+1)(q-1)} = 1, t^{q-1} \neq 1$	$\frac{q^3(q-1)}{2}$

Tabelle A.15: Halbeinfache Konjugiertenklassen von L_P

A.16 Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von L_P

In der folgenden Tabelle werden für jeden halbeinfachen Klassentyp h_i von L_P Vertreter der zu h_i gehörenden halbeinfachen Konjugiertenklassen angegeben.

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$h_1(i) := h(\tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_1^{2i}, \tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_1^i)$	$i = 0, \dots, q-2$	$q - 1$
$h_2(i, j) := h(\tilde{\zeta}_3^i, \tilde{\zeta}_1^j, \tilde{\zeta}_3^{qi}, \tilde{\zeta}_3^{q^2i})$	$i = 0, \dots, q^3 - 2$ $j = 0, \dots, q-2$ $i \neq (q^2 + q + 1)l$ oder $j \neq 2l, \quad l = 0, \dots, q-2$	$\frac{(q^3-2)(q-1)}{2}$
$h_3(i) := h(\tilde{\eta}_3^i, \tilde{\eta}_3^{(q^3+1)i}, \tilde{\eta}_3^{q^4i}, \tilde{\eta}_3^{q^2i})$	$i = 0, \dots, q^4 - q^3 + q - 2$ $i \neq (q^3 + 1)l, \quad l = 0, \dots, q-2$	$\frac{q^3(q-1)}{2}$

Tabelle A.16: Repräsentanten der halbeinfachen Klassen von L_P

A.17 Die Konjugiertenklassen von L_P

Die folgende Tabelle enthält eine vollständige Auflistung der Konjugiertenklassen von $L_P = (\mathbf{L}_P)^F$. Zur Wahl der Bezeichnungen der Konjugiertenklassen vergleiche man den Unterabschnitt „Gemischte Klassen“ in Abschnitt 3.3.

Name	Repräsentant	$ C_{L_P} $
$c_{1,0}$	h_1	$q^3(q^6 - 1)(q - 1)$
$c_{1,1}$	$h_1 x_\alpha(1)$	$q^3(q - 1)$
$c_{2,0}$	h_2	$(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{3,0}$	h_3	$(q^3 + 1)(q - 1)$

Tabelle A.17: Liste der Konjugiertenklassen und Zentralisatorordnungen von L_P

A.18 F -Konjugiertenklassen von $\mathbf{W}_{\mathbf{L}_Q}$

Wir beschreiben die F -Konjugiertenklassen der Weylgruppe $\mathbf{W}_{\mathbf{L}_Q}$ der Levi-Untergruppe $\mathbf{L}_Q$ durch Angabe von Repräsentanten w_i und durch Angabe von Ordnung und Isomorphietyp des F -Zentralisators $\mathbf{W}_i \cap \mathbf{W}_{\mathbf{L}_Q}$ ($\mathbf{W}_i$ wie in Tabelle A.3).

w_i	w_i als Produkt der Erzeuger	$ \mathbf{W}_i $	Isomorphietyp von $\mathbf{W}_i \cap \mathbf{W}_{\mathbf{L}_Q}$
w_0	1	2	$(\mathbf{W}_{\mathbf{L}_Q})^F \cong \mathbb{Z}_2$
w_1	w_{r_2}	2	$\mathbb{Z}_2$

Tabelle A.18: F -Konjugiertenklassen von $\mathbf{W}_{\mathbf{L}_Q}$

A.19 Maximale Tori von L_Q

In der folgenden Tabelle sind die maximalen Tori $\mathbf{T}_i^F = \mathbf{T}^{(Fw_i^{-1})}$ von $L_Q = (\mathbf{L}_Q)^F$ aufgelistet ($i = 0, 1$). Wir geben die Elemente in $\mathbf{T}_i^F$ sowie den Isomorphietyp von $\mathbf{T}_i^F$ an. Vergleiche auch Tabelle A.4.

Torus	$\mathbf{T}_i^F$	Isomorphietyp
$\mathbf{T}_0^F$	$\{h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2}) \mid t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1\}$	$\mathbb{Z}_{q^3-1} \times \mathbb{Z}_{q-1}$
$\mathbf{T}_1^F$	$\{h(t^{q^2+q}, t^{q^2+q+1}, t^{q^3+q^2}, t^{q+1}) \mid t^{(q^3-1)(q+1)} = 1\}$	$\mathbb{Z}_{(q^3-1)(q+1)}$

Tabelle A.19: Maximale Tori von L_Q

A.20 Halbeinfache Klassen von L_Q

In der folgenden Tabelle sind für jeden halbeinfachen Klassentyp h_i von L_Q Vertreter für die zugehörigen halbeinfachen Konjugiertenklassen angegeben. Wir geben außerdem die Anzahl der halbeinfachen Konjugiertenklassen in h_i an.

Typ	Repräsentant	Anzahl
h_1	$h(t^2, t^{q^2+q+1}, t^{2q}, t^{2q^2})$ $t^{q^3-1} = 1$	$q^3 - 1$
h_2	$h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})$ $t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1; t_2 \neq t_1^{q^2+q+1}$	$\frac{(q^3-1)(q-2)}{2}$
h_3	$h(t^{q^2+q}, t^{q^2+q+1}, t^{q^3+q^2}, t^{q+1})$ $t^{(q^3-1)(q+1)} = 1, t^{q^3-1} \neq 1$	$\frac{q(q^3-1)}{2}$

Tabelle A.20: Halbeinfache Konjugiertenklassen von L_Q

A.21 Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von L_Q

In der folgenden Tabelle werden für jeden halbeinfachen Klassentyp h_i von L_Q Vertreter der zu h_i gehörenden halbeinfachen Konjugiertenklassen angegeben. Zur Definition von c siehe A.6.

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$h_1(i) := h(\tilde{\zeta}_3^{2i}, \tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_3^{2qi}, \tilde{\zeta}_3^{2q^2i})$	$i = 0, \dots, q^3 - 2$	$q^3 - 1$
$h_2(i, j) := h(\tilde{\zeta}_3^i, \tilde{\zeta}_1^j, \tilde{\zeta}_3^{qi}, \tilde{\zeta}_3^{q^2i})$	$i = 0, \dots, q^3 - 2$ $j = 0, \dots, q - 2$ $i \neq 2l$ oder $j \neq l$, $l = 0, \dots, q^3 - 2$	$\frac{(q^3-1)(q-2)}{2}$
$h_3(i) := h(\tilde{\mu}_3^{(q^2+q)ci}, \tilde{\mu}_3^{(q^2+q+1)ci}, \tilde{\mu}_3^{(q^3+q^2)ci}, \tilde{\mu}_3^{(q+1)ci})$	$i = 0, \dots, q^4 + q^3 - q - 2$ $i \neq (q+1)l, l = 0, \dots, q^3 - 2$	$\frac{q(q^3-1)}{2}$

Tabelle A.21: Repräsentanten der halbeinfachen Klassen von L_Q

A.22 Die Konjugiertenklassen von L_Q

Die folgende Tabelle enthält eine vollständige Auflistung der Konjugiertenklassen von $L_Q = (\mathbf{L}_Q)^F$. Zur Wahl der Bezeichnungen der Konjugiertenklassen vergleiche man den Unterabschnitt „Unipotente und gemischte Klassen“ in Abschnitt 3.4.

Name	Repräsentant	$ C_{L_Q} $
$c_{1,0}$	h_1	$q(q^3 - 1)(q^2 - 1)$
$c_{1,1}$	$h_1 x_\beta(1)$	$q(q^3 - 1)$
$c_{2,0}$	h_2	$(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{3,0}$	h_3	$(q^3 - 1)(q + 1)$

Tabelle A.22: Liste der Konjugiertenklassen und Zentralisatorordnungen von L_Q

A.23 Halbeinfache Klassen von P

In der folgenden Tabelle sind für jeden halbeinfachen Klassentyp h_i von $P = \mathbf{P}^F$ Vertreter für die zugehörigen halbeinfachen Konjugiertenklassen angegeben. Wir geben außerdem die Anzahl der halbeinfachen Konjugiertenklassen in h_i an.

Typ	Repräsentant	Anzahl
h_1	$h(1, 1, 1, 1) = 1$	1
h_2	$h(-1, 1, -1, -1)$	1
h_3	$h(-1, -1, -1, -1)$	1
h_4	$h(t, t^2, t, t)$ $t^{q-1} = 1, t^2 \neq 1$	$q - 3$
h_5	$h(1, t, 1, 1)$ $t^{q-1} = 1, t^2 \neq 1$	$q - 3$
h_6	$h(t, 1, t^q, t^{q^2})$ $t^{q^2+q+1} = 1, t \neq 1$	$\frac{q^2+q}{2}$
h_7	$h(t, t^{q^2+q+1}, t^q, t^{q^2})$ $t^{q^3-1} = 1, t^{q^2+q+1} \neq 1, t^2 \neq 1$	$q^3 - q^2 - q - 3$
h_8	$h(t, 1, t^q, t^{q^2})$ $t^{q^3-1} = 1, t^{q^2+q+1} \neq 1, t^2 \neq 1$	$\frac{q^3 - q^2 - q - 3}{2}$
h_9	$h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})$ $t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1; t_1 \neq 1, t_2; t_2 \neq 1, t_1^2; t_1^{q^2+q+1} \neq t_2, t_2^2$	$\frac{q^4 - 4q^3 + 2q^2 - 2q + 15}{2}$
h_{10}	$h(t, 1, t^{-q}, t^{q-1})$ $t^{q^2-q+1} = 1; t \neq 1$	$\frac{q^2-q}{2}$
h_{11}	$h(t, 1, t^{-q}, t^{q^2})$ $t^{q^3+1} = 1, t^{q^2-q+1} \neq 1, t^2 \neq 1$	$\frac{q^3 - q^2 + q - 1}{2}$
h_{12}	$h(t, t^{q^3+1}, t^{q^4}, t^{q^2})$ $t^{(q^3+1)(q-1)} = 1, t^{q^3+1} \neq 1, t^{q-1} \neq 1$	$\frac{q^4 - 2q^3 + 1}{2}$

Tabelle A.23: Halbeinfache Konjugiertenklassen von $P = \mathbf{P}^F$

A.24 Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von P

In der folgenden Tabelle werden für jeden der 12 halbeinfachen Klassentypen h_i von $P = \mathbf{P}^F$ Vertreter der zu h_i gehörenden halbeinfachen Konjugiertenklassen angegeben. Da die halbeinfachen Klassentypen h_1 , h_2 und h_3 jeweils nur genau eine Konjugiertenklasse enthalten, dürfte es wohl nicht zu Missverständnissen führen, dass wir in diesen Fällen sowohl den halbeinfachen Klassentyp als auch die von uns gewählten Vertreter der Konjugiertenklassen mit h_1 , h_2 bzw. h_3 bezeichnen.

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$h_1 := h(1, 1, 1, 1)$		1
$h_2 := h(-1, 1, -1, -1)$		1
$h_3 := h(-1, -1, -1, -1)$		1
$h_4(i) := h(\tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_1^{2i}, \tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_1^i)$	$i = 0, \dots, q-2$ $i \neq 0, \frac{q-1}{2}$	$q-3$
$h_5(i) := h(1, \tilde{\zeta}_1^i, 1, 1)$	$i = 0, \dots, q-2$ $i \neq 0, \frac{q-1}{2}$	$q-3$
$h_6(i) := h(\tilde{\varphi}_3^i, 1, \tilde{\varphi}_3^{qi}, \tilde{\varphi}_3^{q^2i})$	$i = 0, \dots, q^2 + q$ $i \neq 0$	$\frac{q^2+q}{2}$
$h_7(i) := h(\tilde{\zeta}_3^i, \tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_3^{qi}, \tilde{\zeta}_3^{q^2i})$	$i = 0, \dots, q^3 - 2$ $i \neq (q-1)l, l = 0, \dots, q^2 + q + 1$ $i \neq \frac{q^3-1}{2}$	$q^3 - q^2 - q - 3$
$h_8(i) := h(\tilde{\zeta}_3^i, 1, \tilde{\zeta}_3^{qi}, \tilde{\zeta}_3^{q^2i})$	$i = 0, \dots, q^3 - 2$ $i \neq (q-1)l, l = 0, \dots, q^2 + q + 1$ $i \neq \frac{q^3-1}{2}$	$\frac{q^3-q^2-q-3}{2}$
$h_9(i, j) := h(\tilde{\zeta}_3^i, \tilde{\zeta}_1^j, \tilde{\zeta}_3^{qi}, \tilde{\zeta}_3^{q^2i})$	$i = 0, \dots, q^3 - 2$ $j = 0, \dots, q-2$ $i \neq 0$ $j \neq 0$ $i \neq (q^2 + q + 1)l$ oder $j \neq l, l = 0, \dots, q-2$ $i \neq (q^2 + q + 1)l$ oder $j \neq 2l, l = 0, \dots, q-2$ $i \neq j + (q-1)l, l = 0, \dots, q^2 + q$ $i \neq 2j + (q-1)l, l = 0, \dots, q^2 + q$	$\frac{q^4-4q^3+2q^2-2q+15}{2}$
$h_{10}(i) := h(\tilde{\varphi}_6^i, 1, \tilde{\varphi}_6^{-qi}, \tilde{\varphi}_6^{(q-1)i})$	$i = 0, \dots, q^2 - q$ $i \neq 0$	$\frac{q^2-q}{2}$

Fortsetzung

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$h_{11}(i) := h(\tilde{\xi}_3^i, 1, \tilde{\xi}_3^{-q^i}, \tilde{\xi}_3^{q^2 i})$	$i = 0, \dots, q^3$ $i \neq 0, \frac{q^3+1}{2}$ $i \neq (q+1)l, l = 0, \dots, q^2 - q$	$\frac{q^3 - q^2 + q - 1}{2}$
$h_{12}(i) := h(\tilde{\eta}_3^i, \tilde{\eta}_3^{(q^3+1)i}, \tilde{\eta}_3^{q^4 i}, \tilde{\eta}_3^{q^2 i})$	$i = 0, \dots, q^4 - q^3 + q - 2$ $i \neq (q-1)l, l = 0, \dots, q^3$ $i \neq (q^3+1)l, l = 0, \dots, q-2$	$\frac{q^4 - 2q^3 + 1}{2}$

Tabelle A.24: Repräsentanten der halbeinfachen Klassen von $P = \mathbf{P}^F$

A.25 Die Konjugiertenklassen von P

Die folgende Tabelle enthält eine vollständige Auflistung der Konjugiertenklassen von $P = \mathbf{P}^F$. Zur Wahl der Bezeichnungen der Konjugiertenklassen vergleiche man den Unterabschnitt „Gemischte Klassen“ in Abschnitt 3.5. In der Tabelle A.25 ist $\zeta \in \mathbb{F}$ ein Nichtquadrat mit $\zeta^q = \zeta$. Der Parameter a' in den Repräsentanten der unipotenten Klassen vom Typ $c_{1,9}$ durchläuft die Parametermenge I_3 mit $|I_3| = q+1$, die im Unterabschnitt „Unipotente Klassen“ in Abschnitt 3.2 definiert ist.

Name	Repräsentant	$ C_P $
$c_{1,0}$	1	$q^{12}(q^6 - 1)(q - 1)$
$c_{1,1}$	$x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q^{12}(q^6 - 1)$
$c_{1,2}$	$x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q^{11}(q^3 - 1)$
$c_{1,3}$	$x_{2\alpha+\beta}(1)$	$q^{10}(q - 1)$
$c_{1,4}$	$x_\alpha(1)$	$q^7(q - 1)$
$c_{1,5}$	$x_\beta(1)x_{3\alpha+\beta}(1)$	$2q^8(q^2 + q + 1)$
$c_{1,6}$	$x_\alpha(1)x_{3\alpha+2\beta}(-1)$	$2q^7$
$c_{1,7}$	$x_{\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(\zeta)$	$2q^8(q^2 - q + 1)$
$c_{1,8}$	$x_\alpha(1)x_{3\alpha+2\beta}(-\zeta)$	$2q^7$
$c_{1,9}$	$x_\alpha(1)x_{\alpha+\beta}(a')$	q^6
$c_{1,10}$	$x_\alpha(1)x_\beta(1)$	q^4
$c_{2,0}$	h_2	$q^4(q^6 - 1)(q - 1)$
$c_{2,1}$	$h_2x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q^4(q^6 - 1)$
$c_{2,2}$	$h_2x_\alpha(1)$	$q^4(q - 1)$
$c_{2,3}$	$h_2x_\alpha(1)x_{3\alpha+2\beta}(-1)$	$2q^4$
$c_{2,4}$	$h_2x_\alpha(1)x_{3\alpha+2\beta}(-\zeta)$	$2q^4$
$c_{3,0}$	h_3	$q^4(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{3,1}$	$h_3x_{\alpha+\beta}(1)$	$q^4(q - 1)$
$c_{3,2}$	$h_3x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q^4(q^3 - 1)$
$c_{3,3}$	$h_3x_{\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(1)$	$2q^4$
$c_{3,4}$	$h_3x_{\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(\zeta)$	$2q^4$
$c_{4,0}$	h_4	$q^3(q^6 - 1)(q - 1)$
$c_{4,1}$	$h_4x_\alpha(1)$	$q^3(q - 1)$

Fortsetzung

Name	Repräsentant	$ C_P $
$c_{5,0}$ $c_{5,1}$	h_5 $h_5 x_{2\alpha+\beta}(1)$	$q^3(q^3-1)(q-1)$ $q^3(q-1)$
$c_{6,0}$ $c_{6,1}$ $c_{6,2}$ $c_{6,3}$ $c_{6,4}$	h_6 $h_6 x_\beta(1)$ $h_6 x_{3\alpha+\beta}(1)$ $h_6 x_{3\alpha+2\beta}(1)$ $h_6 x_\beta(1) x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q^3(q^3-1)(q-1)$ $q^2(q^3-1)$ $q^2(q^3-1)$ $q^3(q^3-1)$ $q^2(q^2+q+1)$
$c_{7,0}$ $c_{7,1}$	h_7 $h_7 x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q(q^3-1)(q-1)$ $q(q^3-1)$
$c_{8,0}$ $c_{8,1}$	h_8 $h_8 x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q(q^3-1)(q-1)$ $q(q^3-1)$
$c_{9,0}$	h_9	$(q^3-1)(q-1)$
$c_{10,0}$ $c_{10,1}$ $c_{10,2}$	h_{10} $h_{10} x_{3\alpha+2\beta}(1)$ $h_{10} x_\beta(s) x_{3\alpha+\beta}(s^q) x_{3\alpha+2\beta}(r)$	$q^3(q^3+1)(q-1)$ $q^3(q^3+1)$ $q^2(q^2-q+1)$
$c_{11,0}$ $c_{11,1}$	h_{11} $h_{11} x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q(q^3+1)(q-1)$ $q(q^3+1)$
$c_{12,0}$	h_{12}	$(q^3+1)(q-1)$

Tabelle A.25: Liste der Konjugiertenklassen und Zentralisatorordnungen von $P = \mathbf{P}^F$

A.26 Fusionen der Konjugiertenklassen von B in P und Q

Die $c_{i,j}$ in der linken Spalte der folgenden Tabelle bezeichnen Klassentypen von $B = \mathbf{B}^F$, die in der mittleren Spalte Klassentypen von $P = \mathbf{P}^F$ und die in der rechten Spalte Klassentypen von $Q = \mathbf{Q}^F$. Zur Berechnung der Fusionen vergleiche man die Abschnitte 3.5 und 3.6.

Konjugierten- klasse von B	Konjugierten- klasse von P	Konjugierten- klasse von Q
$c_{1,0}$	$c_{1,0}$	$c_{1,0}$
$c_{1,1}$	$c_{1,1}$	$c_{1,1}$
$c_{1,2}$	$c_{1,2}$	$c_{1,1}$
$c_{1,3}$	$c_{1,2}$	$c_{1,2}$
$c_{1,4}$	$c_{1,3}$	$c_{1,3}$
$c_{1,5}$	$c_{1,3}$	$c_{1,4}$
$c_{1,6}$	$c_{1,3}$	$c_{1,5}$
$c_{1,7}$	$c_{1,4}$	$c_{1,4}$
$c_{1,8}$	$c_{1,5}$	$c_{1,6}$
$c_{1,9}$	$c_{1,5}$	$c_{1,7}$
$c_{1,10}$	$c_{1,5}$	$c_{1,8}$
$c_{1,11}$	$c_{1,6}$	$c_{1,8}$
$c_{1,12}(i, b)$	$c_{1,5}$	$c_{1,9}(i, b)$
$c_{1,13}$	$c_{1,7}$	$c_{1,10}$
$c_{1,14}$	$c_{1,7}$	$c_{1,11}$
$c_{1,15}$	$c_{1,8}$	$c_{1,11}$
$c_{1,16}(i, b)$	$c_{1,7}$	$c_{1,12}(i, b)$
$c_{1,17}(a')$	$c_{1,9}(a')$	$c_{1,13}$
$c_{1,18}$	$c_{1,10}$	$c_{1,14}$
$c_{2,0}$	$c_{2,0}$	$c_{2,0}$
$c_{2,1}$	$c_{2,1}$	$c_{2,1}$
$c_{2,2}$	$c_{2,2}$	$c_{2,2}$
$c_{2,3}$	$c_{2,3}$	$c_{2,3}$
$c_{2,4}$	$c_{2,4}$	$c_{2,4}$

Fortsetzung

Konjugierten- klasse von B	Konjugierten- klasse von P	Konjugierten- klasse von Q
$c_{3,0}$ $c_{3,1}$ $c_{3,2}$ $c_{3,3}$ $c_{3,4}$	$c_{3,0}$ $c_{3,1}$ $c_{3,2}$ $c_{3,3}$ $c_{3,4}$	$c_{2,0}$ $c_{2,2}$ $c_{2,1}$ $c_{2,3}$ $c_{2,4}$
$c_{4,0}$ $c_{4,1}$ $c_{4,2}$ $c_{4,3}$ $c_{4,4}$	$c_{3,0}$ $c_{3,2}$ $c_{3,1}$ $c_{3,3}$ $c_{3,4}$	$c_{3,0}$ $c_{3,1}$ $c_{3,2}$ $c_{3,3}$ $c_{3,4}$
$c_{5,0}(i)$ $c_{5,1}(i)$ $c_{5,2}(i)$ $c_{5,3}(i)$ $c_{5,4}(i)$	$c_{6,0}(i)$ $c_{6,1}(i)$ $c_{6,2}(i)$ $c_{6,3}(i)$ $c_{6,4}(i)$	$c_{6,0}(i)$ $c_{6,1}(i)$ $c_{6,2}(i)$ $c_{6,2}(i)$ $c_{6,3}(i)$
$c_{6,0}(i)$ $c_{6,1}(i)$	$c_{4,0}(i)$ $c_{4,1}(i)$	$c_{4,0}(i)$ $c_{4,1}(i)$
$c_{7,0}(i)$ $c_{7,1}(i)$	$c_{5,0}(i)$ $c_{5,1}(i)$	$c_{5,0}(i)$ $c_{5,1}(i)$
$c_{8,0}(i)$ $c_{8,1}(i)$	$c_{5,0}(i)$ $c_{5,1}(i)$	$c_{5,0}(i)$ $c_{5,1}(i)$
$c_{9,0}(i)$ $c_{9,1}(i)$	$c_{7,0}((q^2 + q - 1)i)$ $c_{7,1}((q^2 + q - 1)i)$	$c_{7,0}(i)$ $c_{7,1}(i)$
$c_{10,0}(i)$ $c_{10,1}(i)$	$c_{7,0}(i)$ $c_{7,1}(i)$	$c_{8,0}\left(\frac{-q^3 + q^2 + q + 1}{2}i\right)$ $c_{8,1}\left(\frac{-q^3 + q^2 + q + 1}{2}i\right)$
$c_{11,0}(i)$ $c_{11,1}(i)$	$c_{8,0}(i)$ $c_{8,1}(i)$	$c_{8,0}\left(\frac{-q^3 + q^2 + q + 1}{2}i\right)$ $c_{8,1}\left(\frac{-q^3 + q^2 + q + 1}{2}i\right)$
$c_{12,0}(i, j)$	$c_{9,0}(i, j)$	$c_{9,0}(i, j)$

Tabelle A.26: Fusionen der Konjugiertenklassen von B in P und Q

A.27 Fusionen der Konjugiertenklassen von P in ${}^3D_4(q)$

Die $c_{i,j}$ in der linken Spalte der folgenden Tabelle bezeichnen Klassentypen von $P = \mathbf{P}^F$, die in der rechten Spalte Klassentypen von ${}^3D_4(q) = \mathbf{G}^F$.

Konjugiertenklasse von P	Konjugiertenklasse von ${}^3D_4(q)$
$c_{1,0}$ $c_{1,1}$ $c_{1,2}$ $c_{1,3}$ $c_{1,4}$ $c_{1,5}$ $c_{1,6}$ $c_{1,7}$ $c_{1,8}$ $c_{1,9}(a')$ $c_{1,10}$	$c_{1,0}$ $c_{1,1}$ $c_{1,1}$ $c_{1,2}$ $c_{1,2}$ $c_{1,3}$ $c_{1,3}$ $c_{1,4}$ $c_{1,4}$ $c_{1,5}$ $c_{1,6}$
$c_{2,0}$ $c_{2,1}$ $c_{2,2}$ $c_{2,3}$ $c_{2,4}$	$c_{2,0}$ $c_{2,1}$ $c_{2,2}$ $c_{2,3}$ $c_{2,4}$
$c_{3,0}$ $c_{3,1}$ $c_{3,2}$ $c_{3,3}$ $c_{3,4}$	$c_{2,0}$ $c_{2,2}$ $c_{2,1}$ $c_{2,3}$ $c_{2,4}$
$c_{4,0}(i)$ $c_{4,1}(i)$	$c_{3,0}(i)$ $c_{3,1}(i)$
$c_{5,0}(i)$ $c_{5,1}(i)$	$c_{3,0}(i)$ $c_{3,1}(i)$

Fortsetzung

Konjugiertenklasse von P	Konjugiertenklasse von ${}^3D_4(q)$
$c_{6,0}(i)$ $c_{6,1}(i)$ $c_{6,2}(i)$ $c_{6,3}(i)$ $c_{6,4}(i)$	$c_{4,0}(i)$ $c_{4,1}(i)$ $c_{4,1}(i)$ $c_{4,1}(i)$ $c_{4,2}(i)$
$c_{7,0}(i)$ $c_{7,1}(i)$	$c_{5,0}(i)$ $c_{5,1}(i)$
$c_{8,0}(i)$ $c_{8,1}(i)$	$c_{5,0}(i)$ $c_{5,1}(i)$
$c_{9,0}(i, j)$	$c_{6,0}(i, j)$
$c_{10,0}(i)$ $c_{10,1}(i)$ $c_{10,2}(i)$	$c_{9,0}(i)$ $c_{9,1}(i)$ $c_{9,2}(i)$
$c_{11,0}(i)$ $c_{11,1}(i)$	$c_{10,0}(i)$ $c_{10,1}(i)$
$c_{12,0}(i)$	$c_{11,0}(i)$

Tabelle A.27: Fusionen der Konjugiertenklassen von P in ${}^3D_4(q)$

A.28 Fusionen der Konjugiertenklassen von P in L_P

Die $c_{i,j}$ in der linken Spalte der folgenden Tabelle bezeichnen Klassentypen von $\mathbf{P}^F$, die in der rechten Spalte Klassentypen von $L_P = (\mathbf{L}_P)^F$.

Konjugiertenklasse von P	Konjugiertenklasse von L_P
$c_{1,0}$ $c_{1,1}$ $c_{1,2}$ $c_{1,3}$ $c_{1,4}$ $c_{1,5}$ $c_{1,6}$ $c_{1,7}$ $c_{1,8}$ $c_{1,9}(a')$ $c_{1,10}$	$c_{1,0}(0)$ $c_{1,0}(0)$ $c_{1,0}(0)$ $c_{1,0}(0)$ $c_{1,1}(0)$ $c_{1,0}(0)$ $c_{1,1}(0)$ $c_{1,0}(0)$ $c_{1,1}(0)$ $c_{1,1}(0)$ $c_{1,1}(0)$
$c_{2,0}$ $c_{2,1}$ $c_{2,2}$ $c_{2,3}$ $c_{2,4}$	$c_{1,0}(\frac{q-1}{2})$ $c_{1,0}(\frac{q-1}{2})$ $c_{1,1}(\frac{q-1}{2})$ $c_{1,1}(\frac{q-1}{2})$ $c_{1,1}(\frac{q-1}{2})$
$c_{3,0}$ $c_{3,1}$ $c_{3,2}$ $c_{3,3}$ $c_{3,4}$	$c_{2,0}(\frac{q^3-1}{2}, \frac{q-1}{2})$ $c_{2,0}(\frac{q^3-1}{2}, \frac{q-1}{2})$ $c_{2,0}(\frac{q^3-1}{2}, \frac{q-1}{2})$ $c_{2,0}(\frac{q^3-1}{2}, \frac{q-1}{2})$ $c_{2,0}(\frac{q^3-1}{2}, \frac{q-1}{2})$
$c_{4,0}(i)$ $c_{4,1}(i)$	$c_{1,0}(i)$ $c_{1,1}(i)$
$c_{5,0}(i)$ $c_{5,1}(i)$	$c_{2,0}(0, i)$ $c_{2,0}(0, i)$

Fortsetzung

Konjugiertenklasse von P	Konjugiertenklasse von L_P
$c_{6,0}(i)$ $c_{6,1}(i)$ $c_{6,2}(i)$ $c_{6,3}(i)$ $c_{6,4}(i)$	$c_{2,0}((q-1)i, 0)$ $c_{2,0}((q-1)i, 0)$ $c_{2,0}((q-1)i, 0)$ $c_{2,0}((q-1)i, 0)$ $c_{2,0}((q-1)i, 0)$
$c_{7,0}(i)$ $c_{7,1}(i)$	$c_{2,0}(i, i)$ $c_{2,1}(i, i)$
$c_{8,0}(i)$ $c_{8,1}(i)$	$c_{2,0}(i, 0)$ $c_{2,1}(i, 0)$
$c_{9,0}(i, j)$	$c_{2,0}(i, j)$
$c_{10,0}(i)$ $c_{10,1}(i)$ $c_{10,2}(i)$	$c_{3,0}((q^2-1)i)$ $c_{3,0}((q^2-1)i)$ $c_{3,0}((q^2-1)i)$
$c_{11,0}(i)$ $c_{11,1}(i)$	$c_{3,0}((q-1)i)$ $c_{3,0}((q-1)i)$
$c_{12,0}(i)$	$c_{3,0}(i)$

Tabelle A.28: Fusionen der Konjugiertenklassen von P in L_P

A.29 Halbeinfache Klassen von Q

In der folgenden Tabelle sind für jeden halbeinfachen Klassentyp h_i von $Q = \mathbf{Q}^F$ Vertreter für die zugehörigen halbeinfachen Konjugiertenklassen angegeben. Wir geben außerdem die Anzahl der halbeinfachen Konjugiertenklassen in h_i an.

Typ	Repräsentant	Anzahl
h_1	$h(1, 1, 1, 1) = 1$	1
h_2	$h(-1, 1, -1, -1)$	1
h_3	$h(1, -1, 1, 1)$	1
h_4	$h(t, t^2, t, t)$ $t^{q-1} = 1, t^2 \neq 1$	$q - 3$
h_5	$h(1, t, 1, 1)$ $t^{q-1} = 1, t^2 \neq 1$	$\frac{q-3}{2}$
h_6	$h(t, 1, t^q, t^{q^2})$ $t^{q^2+q+1} = 1, t \neq 1$	$q^2 + q$
h_7	$h(t^2, t^{q^2+q+1}, t^{2q}, t^{2q^2})$ $t^{q^3-1} = 1, t^{q^2+q+1} \neq 1, t^2 \neq 1$	$q^3 - q^2 - q - 3$
h_8	$h(t, t^{q^2+q+1}, t^q, t^{q^2})$ $t^{q^3-1} = 1, t^{q^2+q+1} \neq 1, t^2 \neq 1$	$q^3 - q^2 - q - 3$
h_9	$h(t_1, t_2, t_1^q, t_1^{q^2})$ $t_1^{q^3-1} = t_2^{q-1} = 1; t_1 \neq 1, t_2; t_2 \neq 1, t_1^2; t_1^{q^2+q+1} \neq t_2, t_2^2$	$\frac{q^4 - 4q^3 + 2q^2 - 2q + 15}{2}$
h_{10}	$h(1, t, 1, 1)$ $t^{q+1} = 1, t^2 \neq 1$	$\frac{q-1}{2}$
h_{11}	$h(t^{q^2+q}, t^{q^2+q+1}, t^{q^3+q^2}, t^{q+1})$ $t^{(q^3-1)(q+1)} = 1, t^{q^3-1} \neq 1, t^{q+1} \neq 1$	$\frac{q^4 - 2q + 1}{2}$

Tabelle A.29: Halbeinfache Konjugiertenklassen von $Q = \mathbf{Q}^F$

A.30 Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von Q

In der folgenden Tabelle werden für jeden halbeinfachen Klassentyp h_i von $Q = \mathbf{Q}^F$ Vertreter der zu h_i gehörenden halbeinfachen Konjugiertenklassen angegeben. Zur Definition von c siehe A.6.

Definition	Parameterbereich	Anzahl der Klassen
$h_1 := h(1, 1, 1, 1)$		1
$h_2 := h(-1, 1, -1, -1)$		1
$h_3 := h(1, -1, 1, 1)$		1
$h_4(i) := h(\tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_1^{2i}, \tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_1^i)$	$i = 0, \dots, q-2$ $i \neq 0, \frac{q-1}{2}$	$q-3$
$h_5(i) := h(1, \tilde{\zeta}_1^i, 1, 1)$	$i = 0, \dots, q-2$ $i \neq 0, \frac{q-1}{2}$	$\frac{q-3}{2}$
$h_6(i) := h(\tilde{\varphi}_3^i, 1, \tilde{\varphi}_3^{qi}, \tilde{\varphi}_3^{q^2i})$	$i = 0, \dots, q^2+q$ $i \neq 0$	q^2+q
$h_7(i) := h(\tilde{\zeta}_3^{2i}, \tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_3^{2qi}, \tilde{\zeta}_3^{2q^2i})$	$i = 0, \dots, q^3-2$ $i \neq (q-1)l, l = 0, \dots, q^2+q+1$ $i \neq \frac{q^3-1}{2}$	$q^3 - q^2 - q - 3$
$h_8(i) := h(\tilde{\zeta}_3^i, \tilde{\zeta}_1^i, \tilde{\zeta}_3^{qi}, \tilde{\zeta}_3^{q^2i})$	$i = 0, \dots, q^3-2$ $i \neq (q-1)l, l = 0, \dots, q^2+q+1$ $i \neq \frac{q^3-1}{2}$	$q^3 - q^2 - q - 3$
$h_9(i, j) := h(\tilde{\zeta}_3^i, \tilde{\zeta}_1^j, \tilde{\zeta}_3^{qi}, \tilde{\zeta}_3^{q^2i})$	$i = 0, \dots, q^3-2$ $j = 0, \dots, q-2$ $i \neq 0$ $j \neq 0$ $i \neq (q^2+q+1)l$ oder $j \neq l, l = 0, \dots, q-2$ $i \neq (q^2+q+1)l$ oder $j \neq 2l, l = 0, \dots, q-2$ $i \neq j + (q-1)l, l = 0, \dots, q^2+q$ $i \neq 2j + (q-1)l, l = 0, \dots, q^2+q$	$\frac{q^4-4q^3+2q^2-2q+15}{2}$
$h_{10}(i) := h(1, \tilde{\xi}_1^{ci}, 1, 1)$	$i = 0, \dots, q$ $i \neq 0, \frac{q+1}{2}$	$\frac{q-1}{2}$
$h_{11}(i) := h(\tilde{\mu}_3^{(q^2+q)ci}, \tilde{\mu}_3^{(q^2+q+1)ci}, \tilde{\mu}_3^{(q^3+q^2)ci}, \tilde{\mu}_3^{(q+1)ci})$	$i = 0, \dots, q^4+q^3-q-2$ $i \neq (q+1)l, l = 0, \dots, q^3-2$ $i \neq (q^3-1)l, l = 0, \dots, q$	$\frac{q^4-2q+1}{2}$

Tabelle A.30: Repräsentanten der halbeinfachen Klassen von $Q = \mathbf{Q}^F$

A.31 Die Konjugiertenklassen von Q

Die folgende Tabelle enthält eine vollständige Auflistung der Konjugiertenklassen von $Q = \mathbf{Q}^F$. Zur Wahl der Bezeichnungen der Konjugiertenklassen vergleiche man den Unterabschnitt „Unipotente und gemischte Klassen“ in Abschnitt 3.6. In der Tabelle A.31 ist $\zeta \in \mathbb{F}$ ein Nichtquadrat mit $\zeta^q = \zeta$, $a \in \mathbb{F}$ mit $a^{q^3} = a$, $a^q \neq a$. Der Parameter (i, b) in den Repräsentanten der unipotenten Klassen vom Typ $c_{1,9}$ durchläuft die Parametermenge I_1 mit $|I_1| = \frac{q-3}{2}$, und der Parameter (i, b) in den Repräsentanten der unipotenten Klassen vom Typ $c_{1,12}$ durchläuft die Parametermenge I_2 mit $|I_2| = \frac{q-1}{2}$. Die Parametermengen I_1 und I_2 sind im Unterabschnitt „Unipotente Klassen“ in Abschnitt 3.2 definiert.

Name	Repräsentant	$ C_Q $
$c_{1,0}$	1	$q^{12}(q^3 - 1)(q^2 - 1)$
$c_{1,1}$	$x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q^{12}(q^3 - 1)$
$c_{1,2}$	$x_\beta(1)$	$q^8(q^3 - 1)$
$c_{1,3}$	$x_{2\alpha+\beta}(1)$	$q^{10}(q^2 - 1)$
$c_{1,4}$	$x_{\alpha+\beta}(1)$	$q^8(q - 1)$
$c_{1,5}$	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+2\beta}(2)$	q^8
$c_{1,6}$	$x_\beta(1)x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q^8(q^2 + q + 1)$
$c_{1,7}$	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(-1)$	$2q^8$
$c_{1,8}$	$x_{\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(1)$	$2q^8$
$c_{1,9}(i, b)$	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(\zeta^i)x_{3\alpha+\beta}(b)$	q^8
$c_{1,10}$	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(-\zeta)$	$2q^8$
$c_{1,11}$	$x_{\alpha+\beta}(1)x_{3\alpha+\beta}(\zeta)$	$2q^8$
$c_{1,12}(i, b)$	$x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(\zeta^i)x_{3\alpha+\beta}(b)$	q^8
$c_{1,13}$	$x_\alpha(1)x_{\alpha+\beta}(a)$	q^6
$c_{1,14}$	$x_\alpha(1)x_\beta(1)$	q^4
$c_{2,0}$	h_2	$q^4(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{2,1}$	$h_2x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q^4(q^3 - 1)$
$c_{2,2}$	$h_2x_\alpha(1)$	$q^4(q - 1)$
$c_{2,3}$	$h_2x_\alpha(1)x_{3\alpha+2\beta}(-1)$	$2q^4$
$c_{2,4}$	$h_2x_\alpha(1)x_{3\alpha+2\beta}(-\zeta)$	$2q^4$
$c_{3,0}$	h_3	$q^4(q^3 - 1)(q^2 - 1)$
$c_{3,1}$	$h_3x_\beta(1)$	$q^4(q^3 - 1)$
$c_{3,2}$	$h_3x_{2\alpha+\beta}(1)$	$q^4(q^2 - 1)$
$c_{3,3}$	$h_3x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(-1)$	$2q^4$
$c_{3,4}$	$h_3x_\beta(1)x_{2\alpha+\beta}(-\zeta)$	$2q^4$
$c_{4,0}$	h_4	$q^3(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{4,1}$	$h_4x_\alpha(1)$	$q^3(q - 1)$

Fortsetzung

Name	Repräsentant	$ C_Q $
$c_{5,0}$ $c_{5,1}$	h_5 $h_5 x_{2\alpha+\beta}(1)$	$q^3(q^3-1)(q-1)$ $q^3(q-1)$
$c_{6,0}$ $c_{6,1}$ $c_{6,2}$ $c_{6,3}$	h_6 $h_6 x_\beta(1)$ $h_6 x_{3\alpha+2\beta}(1)$ $h_6 x_\beta(1) x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q^3(q^3-1)(q^2-1)$ $q^2(q^3-1)$ $q^3(q^3-1)$ $q^2(q^2+q+1)$
$c_{7,0}$ $c_{7,1}$	h_7 $h_7 x_\beta(1)$	$q(q^3-1)(q^2-1)$ $q(q^3-1)$
$c_{8,0}$ $c_{8,1}$	h_8 $h_8 x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q(q^3-1)(q-1)$ $q(q^3-1)$
$c_{9,0}$	h_9	$(q^3-1)(q-1)$
$c_{10,0}$ $c_{10,1}$	h_{10} $h_{10} x_{2\alpha+\beta}(1)$	$q^3(q^3-1)(q+1)$ $q^3(q+1)$
$c_{11,0}$	h_{11}	$(q^3-1)(q+1)$

Tabelle A.31: Liste der Konjugiertenklassen und Zentralisatorordnungen von $Q = \mathbf{Q}^F$

A.32 Fusionen der Konjugiertenklassen von Q in ${}^3D_4(q)$

Die $c_{i,j}$ in der linken Spalte der folgenden Tabelle bezeichnen Klassentypen von $Q = \mathbf{Q}^F$, die in der rechten Spalte Klassentypen von ${}^3D_4(q) = \mathbf{G}^F$.

Konjugiertenklasse von Q	Konjugiertenklasse von ${}^3D_4(q)$
$c_{1,0}$ $c_{1,1}$ $c_{1,2}$ $c_{1,3}$ $c_{1,4}$ $c_{1,5}$ $c_{1,6}$ $c_{1,7}$ $c_{1,8}$ $c_{1,9}(i, b)$ $c_{1,10}$ $c_{1,11}$ $c_{1,12}(i, b)$ $c_{1,13}$ $c_{1,14}$	$c_{1,0}$ $c_{1,1}$ $c_{1,1}$ $c_{1,2}$ $c_{1,2}$ $c_{1,2}$ $c_{1,3}$ $c_{1,3}$ $c_{1,3}$ $c_{1,3}$ $c_{1,4}$ $c_{1,4}$ $c_{1,4}$ $c_{1,5}$ $c_{1,6}$
$c_{2,0}$ $c_{2,1}$ $c_{2,2}$ $c_{2,3}$ $c_{2,4}$	$c_{2,0}$ $c_{2,1}$ $c_{2,2}$ $c_{2,3}$ $c_{2,4}$
$c_{3,0}$ $c_{3,1}$ $c_{3,2}$ $c_{3,3}$ $c_{3,4}$	$c_{2,0}$ $c_{2,1}$ $c_{2,2}$ $c_{2,3}$ $c_{2,4}$
$c_{4,0}(i)$ $c_{4,1}(i)$	$c_{3,0}(i)$ $c_{3,1}(i)$
$c_{5,0}(i)$ $c_{5,1}(i)$	$c_{3,0}(i)$ $c_{3,1}(i)$

Fortsetzung

Konjugiertenklasse von Q	Konjugiertenklasse von ${}^3D_4(q)$
$c_{6,0}(i)$ $c_{6,1}(i)$ $c_{6,2}(i)$ $c_{6,3}(i)$	$c_{4,0}(i)$ $c_{4,1}(i)$ $c_{4,1}(i)$ $c_{4,2}(i)$
$c_{7,0}(i)$ $c_{7,1}(i)$	$c_{5,0}((q^2 + q - 1)i)$ $c_{5,1}((q^2 + q - 1)i)$
$c_{8,0}(i)$ $c_{8,1}(i)$	$c_{5,0}(i)$ $c_{5,1}(i)$
$c_{9,0}(i, j)$	$c_{6,0}(i, j)$
$c_{10,0}(i)$ $c_{10,1}(i)$	$c_{7,0}(i)$ $c_{7,1}(i)$
$c_{11,0}(i)$	$c_{8,0}(i)$

Tabelle A.32: Fusionen der Konjugiertenklassen von Q in ${}^3D_4(q)$

A.33 Fusionen der Konjugiertenklassen von Q in L_Q

Die $c_{i,j}$ in der linken Spalte der folgenden Tabelle bezeichnen Klassentypen von $Q = \mathbf{Q}^F$, die in der rechten Spalte Klassentypen von $L_Q = (\mathbf{L}_Q)^F$.

Konjugiertenklasse von Q	Konjugiertenklasse von L_Q
$c_{1,0}$ $c_{1,1}$ $c_{1,2}$ $c_{1,3}$ $c_{1,4}$ $c_{1,5}$ $c_{1,6}$ $c_{1,7}$ $c_{1,8}$ $c_{1,9}(i, b)$ $c_{1,10}$ $c_{1,11}$ $c_{1,12}(i, b)$ $c_{1,13}$ $c_{1,14}$	$c_{1,0}(0)$ $c_{1,0}(0)$ $c_{1,1}(0)$ $c_{1,0}(0)$ $c_{1,0}(0)$ $c_{1,1}(0)$ $c_{1,1}(0)$ $c_{1,1}(0)$ $c_{1,0}(0)$ $c_{1,1}(0)$ $c_{1,1}(0)$ $c_{1,0}(0)$ $c_{1,1}(0)$ $c_{1,0}(0)$ $c_{1,1}(0)$ $c_{1,1}(0)$
$c_{2,0}$ $c_{2,1}$ $c_{2,2}$ $c_{2,3}$ $c_{2,4}$	$c_{2,0}(\frac{q^3-1}{2}, 0)$ $c_{2,1}(\frac{q^3-1}{2}, 0)$ $c_{2,2}(\frac{q^3-1}{2}, 0)$ $c_{2,3}(\frac{q^3-1}{2}, 0)$ $c_{2,4}(\frac{q^3-1}{2}, 0)$
$c_{3,0}$ $c_{3,1}$ $c_{3,2}$ $c_{3,3}$ $c_{3,4}$	$c_{1,0}(\frac{q^3-1}{2})$ $c_{1,1}(\frac{q^3-1}{2})$ $c_{1,0}(\frac{q^3-1}{2})$ $c_{1,1}(\frac{q^3-1}{2})$ $c_{1,1}(\frac{q^3-1}{2})$
$c_{4,0}(i)$ $c_{4,1}(i)$	$c_{2,0}((q^2 + q + 1)i, 2i)$ $c_{2,0}((q^2 + q + 1)i, 2i)$
$c_{5,0}(i)$ $c_{5,1}(i)$	$c_{2,0}(0, i)$ $c_{2,0}(0, i)$

Fortsetzung

Konjugiertenklasse von Q	Konjugiertenklasse von L_Q
$c_{6,0}(i)$	$c_{1,0}(-\frac{q^2+q}{2}(q-1)i)$
$c_{6,1}(i)$	$c_{1,1}(-\frac{q^2+q}{2}(q-1)i)$
$c_{6,2}(i)$	$c_{1,0}(-\frac{q^2+q}{2}(q-1)i)$
$c_{6,3}(i)$	$c_{1,1}(-\frac{q^2+q}{2}(q-1)i)$
$c_{7,0}(i)$	$c_{1,0}(i)$
$c_{7,1}(i)$	$c_{1,1}(i)$
$c_{8,0}(i)$	$c_{2,0}(i, i)$
$c_{8,1}(i)$	$c_{2,0}(i, i)$
$c_{9,0}(i, j)$	$c_{2,0}(i, j)$
$c_{10,0}(i)$	$c_{3,0}((q^3-1)i)$
$c_{10,1}(i)$	$c_{3,0}((q^3-1)i)$
$c_{11,0}(i)$	$c_{3,0}(i)$

Tabelle A.33: Fusionen der Konjugiertenklassen von Q in L_Q

A.34 Die Konjugiertenklassen von $C_P(D)$

Die folgende Tabelle enthält eine Auflistung der Konjugiertenklassen von $C_P(D)$ (zur Definition von D vergleiche Abschnitt 3.7). Als Vertreter für die halbeinfachen Konjugiertenklassen von $C_P(D)$ haben wir die gleichen Vertreter wie für die halbeinfachen Konjugiertenklassen der Boreluntergruppe B gewählt. Bezeichnung und Parametrisierung der halbeinfachen Klassen von $C_P(D)$ können daher den Tabellen A.8 und A.9 entnommen werden.

Name	Repräsentant	$ C_{C_P(D)} $
$c_{1,0}$	1	$q^3(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{1,1}$	$x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q^3(q^3 - 1)$
$c_{1,2}$	$x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q^2(q^3 - 1)$
$c_{1,3}$	$x_\beta(1)$	$q^2(q^3 - 1)$
$c_{1,4}$	$x_\beta(1)x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q^2(q^2 + q + 1)$
$c_{2,0}$	h_2	$q(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{2,1}$	$h_2x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q(q^3 - 1)$
$c_{3,0}$	h_3	$q(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{3,1}$	$h_3x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q(q - 1)$
$c_{4,0}$	h_4	$q(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{4,1}$	$h_4x_\beta(1)$	$q(q^3 - 1)$
$c_{5,0}$	h_5	$q^3(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{5,1}$	$h_5x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q^3(q^3 - 1)$
$c_{5,2}$	$h_5x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q^2(q^3 - 1)$
$c_{5,3}$	$h_5x_\beta(1)$	$q^2(q^3 - 1)$
$c_{5,4}$	$h_5x_\beta(1)x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q^2(q^2 + q + 1)$
$c_{6,0}$	h_6	$(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{7,0}$	h_7	$(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{8,0}$	h_8	$(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{9,0}$	h_9	$q(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{9,1}$	$h_9x_\beta(1)$	$q(q^3 - 1)$
$c_{10,0}$	h_{10}	$q(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{10,1}$	$h_{10}x_{3\alpha+\beta}(1)$	$q(q^3 - 1)$
$c_{11,0}$	h_{11}	$q(q^3 - 1)(q - 1)$
$c_{11,1}$	$h_{11}x_{3\alpha+2\beta}(1)$	$q(q^3 - 1)$
$c_{12,0}$	h_{12}	$(q^3 - 1)(q - 1)$

Tabelle A.34: Liste der Konjugiertenklassen und Zentralisatorordnungen von $C_P(D)$

A.35 Die unipotenten Charaktere von ${}^3D_4(q)$, q ungerade

Die folgende Tabelle enthält die Werte der unipotenten Charaktere von ${}^3D_4(q)$ für ungerades q . Man beachte, dass im Vergleich zur generischen Charaktertafel in CHEVIE die dritte und vierte Zeile vertauscht sind.

	$c_{1,0}$	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	$c_{1,3}$
1	1	1	1	1
$[\varepsilon_1]$	$q^5 - q^3 + q$	$-(q^3 - q)$	q	$q^2 + q$
$[\rho_1]$	$\frac{1}{2}q^3(q^3 + 1)^2$	$\frac{1}{2}q^3(q^3 + 1)$	$\frac{1}{2}q^3(q + 1)$	q^3
$[\rho_2]$	$\frac{1}{2}q^3(q + 1)^2(q^4 - q^2 + 1)$	$-\frac{1}{2}q^3(q^3 - 2q - 1)$	$\frac{1}{2}q^3(q + 1)$	0
${}^3D_4[-1]$	$\frac{1}{2}q^3(q^3 - 1)^2$	$-\frac{1}{2}q^3(q^3 - 1)$	$-\frac{1}{2}q^3(q - 1)$	0
${}^3D_4[1]$	$\frac{1}{2}q^3(q - 1)^2(q^4 - q^2 + 1)$	$\frac{1}{2}q^3(q^3 - 2q + 1)$	$-\frac{1}{2}q^3(q - 1)$	q^3
$[\varepsilon_2]$	$q^{11} - q^9 + q^7$	q^7	0	0
St	q^{12}	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{1,4}$	$c_{1,5}$	$c_{1,6}$	$c_{2,0}$	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$
1	1	1	1	1	1	1
$[\varepsilon_1]$	$-(q^2 - q)$	q	0	q	0	q
$[\rho_1]$	0	0	0	$\frac{1}{2}(q^4 + q^3 + q + 1)$	$\frac{1}{2}(q^3 + 1)$	$\frac{1}{2}(q + 1)$
$[\rho_2]$	q^3	0	0	$\frac{1}{2}(q^4 + q^3 + q + 1)$	$\frac{1}{2}(q^3 + 1)$	$\frac{1}{2}(q + 1)$
${}^3D_4[-1]$	q^3	0	0	$-\frac{1}{2}(q^4 - q^3 - q + 1)$	$\frac{1}{2}(q^3 - 1)$	$\frac{1}{2}(q - 1)$
${}^3D_4[1]$	0	0	0	$-\frac{1}{2}(q^4 - q^3 - q + 1)$	$\frac{1}{2}(q^3 - 1)$	$\frac{1}{2}(q - 1)$
$[\varepsilon_2]$	0	0	0	q^3	q^3	0
St	0	0	0	q^4	0	0

Fortsetzung

	$c_{2,3}$	$c_{2,4}$	$c_{3,0}(i)$	$c_{3,1}(i)$	$c_{4,0}(i)$	$c_{4,1}(i)$
1	1	1	1	1	1	1
$[\varepsilon_1]$	0	0	1	1	$q^2 + q - 1$	$q - 1$
$[\rho_1]$	$\frac{1}{2}(q^2 + 1)$	$-\frac{1}{2}(q^2 - 1)$	$q^3 + 1$	1	$q^3 + 1$	1
$[\rho_2]$	$-\frac{1}{2}(q^2 - 1)$	$\frac{1}{2}(q^2 + 1)$	$q^3 + 1$	1	$q^2 + q$	q
${}^3D_4[-1]$	$\frac{1}{2}(q^2 - 1)$	$-\frac{1}{2}(q^2 + 1)$	0	0	0	0
${}^3D_4[1]$	$-\frac{1}{2}(q^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(q^2 - 1)$	0	0	$q^3 - q^2 - q + 1$	$-(q - 1)$
$[\varepsilon_2]$	0	0	q^3	0	$-(q^3 - q^2 - q)$	q
St	0	0	q^3	0	q^3	0

Fortsetzung

	$c_{4,2}(i)$	$c_{5,0}(i)$	$c_{5,1}(i)$	$c_{6,0}(i, j)$	$c_{7,0}(i)$	$c_{7,1}(i)$	$c_{8,0}(i)$
1	1	1	1	1	1	1	1
$[\varepsilon_1]$	-1	q	0	1	-1	-1	-1
$[\rho_1]$	1	$q+1$	1	2	0	0	0
$[\rho_2]$	0	$q+1$	1	2	0	0	0
${}^3D_4[-1]$	0	0	0	0	q^3-1	-1	0
${}^3D_4[1]$	1	0	0	0	q^3-1	-1	0
$[\varepsilon_2]$	0	1	1	1	q^3	0	1
St	0	q	0	1	$-q^3$	0	-1

Fortsetzung

	$c_{9,0}(i)$	$c_{9,1}(i)$	$c_{9,2}(i)$	$c_{10,0}(i)$	$c_{10,1}(i)$	$c_{11,0}(i)$
1	1	1	1	1	1	1
$[\varepsilon_1]$	$-(q^2 - q - 1)$	$q+1$	1	q	0	1
$[\rho_1]$	0	0	0	0	0	0
$[\rho_2]$	$q^3 + q^2 - q - 1$	$-(q+1)$	-1	0	0	0
${}^3D_4[-1]$	$q^3 - 1$	-1	-1	$q-1$	-1	0
${}^3D_4[1]$	$-(q^2 - q)$	q	0	$q-1$	-1	0
$[\varepsilon_2]$	$-(q^3 + q^2 - q)$	q	0	-1	-1	-1
St	$-q^3$	0	0	$-q$	0	-1

Fortsetzung

	$c_{12,0}(i, j)$	$c_{13,0}(i, j)$	$c_{14,0}(i)$	$c_{15,0}(i, j)$
1	1	1	1	1
$[\varepsilon_1]$	-2	2	0	-1
$[\rho_1]$	2	0	-1	0
$[\rho_2]$	-1	-3	0	0
${}^3D_4[-1]$	0	-2	1	-2
${}^3D_4[1]$	3	1	0	-2
$[\varepsilon_2]$	-2	2	0	-1
St	1	1	1	1

Tabelle A.35: Werte der unipotenten Charaktere von ${}^3D_4(q)$, q ungerade

A.36 Parametrisierung der irreduziblen Charaktere von L_P

In der folgenden Tabelle sind die Parameterbereiche für die irreduziblen Charaktere von L_P angegeben.

Name	Parameterbereich	Anzahl der Charaktere
${}_{L_P}\chi_1(k)$	$k = 0, \dots, q-2$	$q-1$
${}_{L_P}\chi_2(k)$	$k = 0, \dots, q-2$	$q-1$
${}_{L_P}\chi_3(k, l)$	$k = 0, \dots, q^3-2$ $l = 0, \dots, q-2$ $k \neq 0$	$\frac{1}{2}(q^3-2)(q-1)$
${}_{L_P}\chi_4(k)$	$k = 0, \dots, q^4 - q^3 + q - 2$ $k \neq (q^3+1)m, m = 0, \dots, q-2$	$\frac{1}{2}q^3(q-1)$

Tabelle A.36: Parameter für die irreduziblen Charaktere von L_P

A.37 Charaktertafel von L_P

Die folgende Tabelle ist die Charaktertafel der Levi-Untergruppe L_P . Zur Bezeichnung der Konjugiertenklassen vergleiche man Tabelle A.17. Zur Wahl der Parameter k und l vergleiche man Tabelle A.36.

	$c_{1,0}(i)$	$c_{1,1}(i)$	$c_{2,0}(i, j)$	$c_{3,0}(i)$
${}_{L_P}\chi_1(k)$	ζ_1^{2ik}	ζ_1^{2ik}	ζ_1^{jk}	ζ_1^{ik}
${}_{L_P}\chi_2(k)$	$q^3 \zeta_1^{2ik}$	0	ζ_1^{jk}	$-\zeta_1^{ik}$
${}_{L_P}\chi_3(k, l)$	$(q^3+1)\zeta_1^{ik+2il}$	ζ_1^{ik+2il}	$\zeta_3^{ik} \zeta_1^{jl} + \zeta_3^{-ik} \zeta_1^{(k+l)j}$	0
${}_{L_P}\chi_4(k)$	$(q^3-1)\zeta_1^{ik}$	$-\zeta_1^{ik}$	0	$-\eta_3^{ik} - \eta_3^{q^3ik}$

Tabelle A.37: Charaktertafel von L_P

A.38 Parametrisierung der irreduziblen Charaktere von L_Q

In der folgenden Tabelle sind die Parameterbereiche für die irreduziblen Charaktere von L_Q angegeben.

Name	Parameterbereich	Anzahl der Charaktere
${}_{L_Q}\chi_1(k)$	$k = 0, \dots, q^3 - 2$	$q^3 - 1$
${}_{L_Q}\chi_2(k)$	$k = 0, \dots, q^3 - 2$	$q^3 - 1$
${}_{L_Q}\chi_3(k, l)$	$k = 0, \dots, q^3 - 2$ $l = 0, \dots, q - 2$ $l \neq 0$	$\frac{(q^3-1)(q-2)}{2}$
${}_{L_Q}\chi_4(k)$	$k = 0, \dots, q^4 + q^3 - q - 2$ $k \neq (q+1)m, m = 0, \dots, q^3 - 2$	$\frac{q(q^3-1)}{2}$

Tabelle A.38: Parameter für die irreduziblen Charaktere von L_Q

A.39 Charaktertafel von L_Q

Die folgende Tabelle ist die Charaktertafel der Levi-Untergruppe L_Q . Zur Bezeichnung der Konjugiertenklassen vergleiche man Tabelle A.22. Zur Wahl der Parameter k und l vergleiche man Tabelle A.38.

	$c_{1,0}(i)$	$c_{1,1}(i)$	$c_{2,0}(i, j)$	$c_{3,0}(i)$
${}_{L_Q}\chi_1(k)$	ζ_3^{2ik}	ζ_3^{2ik}	ζ_3^{ik}	$\zeta_3^{(q^2-q+1)ik}$
${}_{L_Q}\chi_2(k)$	$q\zeta_3^{2ik}$	0	ζ_3^{ik}	$-\zeta_3^{(q^2-q+1)ik}$
${}_{L_Q}\chi_3(k, l)$	$(q+1)\zeta_3^{2ik}\zeta_1^{il}$	$\zeta_3^{2ik}\zeta_1^{il}$	$\zeta_3^{ik}\zeta_1^{jl} + \zeta_3^{ik}\zeta_1^{(i-j)l}$	0
${}_{L_Q}\chi_4(k)$	$(q-1)\zeta_3^{ik}$	$-\zeta_3^{ik}$	0	$-\mu_3^{ik} - \mu_3^{q^3ik}$

Tabelle A.39: Charaktertafel von L_Q

A.40 Parametrisierung einiger Charaktere von B

In der folgenden Tabelle sind die Parameterbereiche für die in Abschnitt 4.5 berechneten Charaktere der Boreluntergruppe $B = \mathbf{B}^F$ angegeben.

Name	Parameterbereich	Anzahl der Charaktere
$B\chi_1(k)$	$k = 0, \dots, q^3 - 2$	$q^3 - 1$
$B\chi_2$		1
$B\chi_3(k)$	$k = 0, \dots, q - 2$	$q - 1$
$B\chi_4$		1
$B\chi_5(k)$	$k = 0, \dots, q^2 + q$	$q^2 + q + 1$
$B\chi_6(k)$	$k = 0, \dots, q^3 - 2$	$q^3 - 1$

Tabelle A.40: Parameter für Charaktere von B

A.41 Charaktere von B

Die folgende Tabelle enthält die Werte der in Abschnitt 4.5 berechneten Charaktere der Boreluntergruppe $B = \mathbf{B}^F$. Zur Bezeichnung der Konjugiertenklassen vergleiche man Tabelle A.11. Zur Wahl der Parameter k vergleiche man Tabelle A.40.

	$c_{1,0}$	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$
$B\chi_1(k)$	$q - 1$	$q - 1$	$q - 1$
$B\chi_2$	$(q - 1)^2(q^2 + q + 1)$	$(q - 1)^2(q^2 + q + 1)$	$(q - 1)^2(q^2 + q + 1)$
$B\chi_3(k)$	$q(q^3 - 1)$	$q(q^3 - 1)$	$q(q^3 - 1)$
$B\chi_4$	$q^3(q - 1)(q^3 - 1)$	$q^3(q - 1)(q^3 - 1)$	$q^3(q - 1)(q^3 - 1)$
$B\chi_5(k)$	$q^3(q - 1)^2$	$q^3(q - 1)^2$	$-q^3(q - 1)$
$B\chi_6(k)$	$q^4(q - 1)$	$-q^4$	0

Fortsetzung

	$c_{1,3}$	$c_{1,4}$	$c_{1,5}$
$B\chi_1(k)$	-1	$q - 1$	$q - 1$
$B\chi_2$	$-(q - 1)(q^2 + q + 1)$	$(q - 1)^2(q^2 + q + 1)$	$(q - 1)^2(q^2 + q + 1)$
$B\chi_3(k)$	0	$q(q^3 - 1)$	$-q$
$B\chi_4$	0	$q^3(q - 1)(q^3 - 1)$	$-q^3(q - 1)$
$B\chi_5(k)$	$q(q - 1)(q + 1)$	0	0
$B\chi_6(k)$	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{1,6}$	$c_{1,7}$	$c_{1,8}$
$B\chi_1(k)$	-1	$q-1$	-1
$B\chi_2$	$-(q-1)(q^2+q+1)$	$-(q-1)$	$-(q-1)(q^2+q+1)$
$B\chi_3(k)$	0	$q(q^2-1)$	0
$B\chi_4$	0	0	0
$B\chi_5(k)$	$-q$	0	$-q(q+1)$
$B\chi_6(k)$	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{1,9}$	$c_{1,10}$	$c_{1,11}$
$B\chi_1(k)$	-1	$q-1$	$q-1$
$B\chi_2$	$-(q-1)(q^2+q+1)$	$(q-1)^2(q^2+q+1)$	$-(q-1)$
$B\chi_3(k)$	0	$-q$	$q(q^2-1)$
$B\chi_4$	0	$-q^3(q-1)$	0
$B\chi_5(k)$	$-q(q+1)$	$q^2(q-1)$	0
$B\chi_6(k)$	0	0	q^2

Fortsetzung

	$c_{1,12}$	$c_{1,13}$	$c_{1,14}$
$B\chi_1(k)$	-1	-1	$q-1$
$B\chi_2$	$-(q-1)(q^2+q+1)$	$-(q-1)(q^2+q+1)$	$(q-1)^2(q^2+q+1)$
$B\chi_3(k)$	0	0	$-q$
$B\chi_4$	0	0	$-q^3(q-1)$
$B\chi_5(k)$	$-q(q+1)$	$q(q-1)$	$-q^2(q-1)$
$B\chi_6(k)$	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{1,15}$	$c_{1,16}$	$c_{1,17}$	$c_{1,18}$	$c_{2,0}$
$B\chi_1(k)$	$q-1$	-1	$q-1$	-1	0
$B\chi_2$	$-(q-1)$	$-(q-1)(q^2+q+1)$	$-(q-1)$	1	0
$B\chi_3(k)$	$q(q^2-1)$	0	$-q$	0	0
$B\chi_4$	0	0	0	0	0
$B\chi_5(k)$	0	$q(q-1)$	0	0	0
$B\chi_6(k)$	$-q^2$	0	0	0	$(-1)^k(q-1)$

Fortsetzung

	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	$c_{2,3}$	$c_{2,4}$	$c_{3,0}$	$c_{3,1}$
$B\chi_1(k)$	0	0	0	0	0	0
$B\chi_2$	0	0	0	0	0	0
$B\chi_3(k)$	0	0	0	0	$(-1)^k(q^3-1)$	$-(-1)^k$
$B\chi_4$	0	0	0	0	0	0
$B\chi_5(k)$	0	0	0	0	0	0
$B\chi_6(k)$	$-(-1)^k$	$(-1)^k(q-1)$	$-(-1)^k$	$-(-1)^k$	0	0

Fortsetzung

	$c_{3,2}$	$c_{3,3}$	$c_{3,4}$	$c_{4,0}$	$c_{4,1}$	$c_{4,2}$
$B\chi_1(k)$	0	0	0	$(-1)^k(q-1)$	$-(-1)^k$	$(-1)^k(q-1)$
$B\chi_2$	0	0	0	0	0	0
$B\chi_3(k)$	$(-1)^k(q^3-1)$	$-(-1)^k$	$-(-1)^k$	0	0	0
$B\chi_4$	0	0	0	0	0	0
$B\chi_5(k)$	0	0	0	0	0	0
$B\chi_6(k)$	0	0	0	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{4,3}$	$c_{4,4}$	$c_{5,0}(i)$	$c_{5,1}(i)$	$c_{5,2}(i)$
$B\chi_1(k)$	$-(-1)^k$	$-(-1)^k$	$\varphi_3^{-\frac{1}{2}(q^2+q)ik}(q-1)$	$-\varphi_3^{-\frac{1}{2}(q^2+q)ik}$	$\varphi_3^{-\frac{1}{2}(q^2+q)ik}(q-1)$
$B\chi_2$	0	0	0	0	0
$B\chi_3(k)$	0	0	0	0	0
$B\chi_4$	0	0	0	0	0
$B\chi_5(k)$	0	0	$(q-1)^2\varphi_3^{ik}$	$-(q-1)\varphi_3^{ik}$	$-(q-1)\varphi_3^{ik}$
$B\chi_6(k)$	0	0	$q(q-1)\varphi_3^{ik}$	0	0

Fortsetzung

	$c_{5,3}(i)$	$c_{5,4}(i)$	$c_{6,0}(i)$	$c_{6,1}(i)$	$c_{7,0}(i)$	$c_{7,1}(i)$
$B\chi_1(k)$	$\varphi_3^{-\frac{1}{2}(q^2+q)ik}(q-1)$	$-\varphi_3^{-\frac{1}{2}(q^2+q)ik}$	0	0	0	0
$B\chi_2$	0	0	0	0	0	0
$B\chi_3(k)$	0	0	0	0	$\zeta_1^{ik}(q^3-1)$	$-\zeta_1^{ik}$
$B\chi_4$	0	0	0	0	0	0
$B\chi_5(k)$	$(q-1)^2\varphi_3^{ik}$	φ_3^{ik}	0	0	0	0
$B\chi_6(k)$	$-q\varphi_3^{ik}$	0	0	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{8,0}(i)$	$c_{8,1}(i)$	$c_{9,0}(i)$	$c_{9,1}(i)$	$c_{10,0}(i)$	$c_{10,1}(i)$	$c_{11,0}(i)$	$c_{11,1}(i)$	$c_{12,0}(i, j)$
$B\chi_1(k)$	0	0	$\zeta_3^{ik}(q-1)$	$-\zeta_3^{ik}$	0	0	0	0	0
$B\chi_2$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$B\chi_3(k)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$B\chi_4$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$B\chi_5(k)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$B\chi_6(k)$	0	0	0	0	0	0	$\zeta_3^{ik}(q-1)$	$-\zeta_3^{ik}$	0

Tabelle A.41: Charaktere von B

A.42 Konjugiertenklassen von U_P

In der folgenden Tabelle sind die Konjugiertenklassen des unipotenten Radikals U_P aufgelistet. Zur Wahl der Parameter vergleiche man Abschnitt 4.6.

Name	Repräsentant	Anzahl	$ C_{U_P} $
$u_1(d)$	$x_{3\alpha+2\beta}(d)$ $d \in \mathbb{F}_q$	q	$ U_P = q^9$
$u_2(d_1, d_2, d_3, d_4)$	$x_\beta(d_1)x_{\alpha+\beta}(d_2)x_{2\alpha+\beta}(d_3)x_{3\alpha+\beta}(d_4)$ $(d_1, d_2, d_3, d_4) \in \mathbb{F}_q \times \mathbb{F}_{q^3} \times \mathbb{F}_{q^3} \times \mathbb{F}_q$ $(d_1, d_2, d_3, d_4) \neq (0, 0, 0, 0)$	$q^8 - 1$	q^8

Tabelle A.42: Konjugiertenklassen von U_P

A.43 Parametrisierung der irreduziblen Charaktere von U_P

In der folgenden Tabelle sind Parameter für die irreduziblen Charaktere von U_P aufgeführt. Unter $\text{Irr}(\mathbb{F}_q)$ bzw. $\text{Irr}(\mathbb{F}_{q^3})$ verstehen wir die irreduziblen Charaktere der additiven Gruppe von $\mathbb{F}_q$ bzw. $\mathbb{F}_{q^3}$. Man vergleiche auch Abschnitt 4.6.

Name	Parameter	Charaktergrad	Anzahl
$\chi_{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4}$	$(\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$ $\in \text{Irr}(\mathbb{F}_q) \times \text{Irr}(\mathbb{F}_{q^3}) \times \text{Irr}(\mathbb{F}_{q^3}) \times \text{Irr}(\mathbb{F}_q)$	1	q^8
χ_ϕ	$\phi \in \text{Irr}(\mathbb{F}_q), \phi \neq \mathbf{1}$	q^4	$q - 1$

Tabelle A.43: Parameter für die irreduziblen Charaktere von U_P

A.44 Charaktertafel von U_P

Die folgende Tabelle ist die Charaktertafel des unipotenten Radikals U_P . Zur Bezeichnung der Konjugiertenklassen vergleiche man Tabelle A.42. Zur Wahl der Parameter $\phi_1, \dots, \phi_4$ und ϕ vergleiche man Tabelle A.43.

	$u_1(d)$	$u_2(d_1, d_2, d_3, d_4)$
$\chi_{\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4}$	1	$\phi_1(d_1)\phi_2(d_2)\phi_3(d_3)\phi_4(d_4)$
χ_ϕ	$q^4\phi(d)$	0

Tabelle A.44: Charaktertafel von U_P

A.45 Parametrisierung der irreduziblen Charaktere von P

In der folgenden Tabelle sind die Parameterbereiche für die irreduziblen Charaktere von P angegeben.

Name	Parameterbereich	Anzahl der Charaktere
$\chi_1(k)$	$k = 0, \dots, q-2$	$q-1$
$\chi_2(k)$	$k = 0, \dots, q-2$	$q-1$
$\chi_3(k, l)$	$k = 0, \dots, q^3-2$ $l = 0, \dots, q-2$ $k \neq 0$	$\frac{1}{2}(q^3-2)(q-1)$
$\chi_4(k)$	$k = 0, \dots, q^4 - q^3 + q - 2$ $k \neq (q^3+1)m, m = 0, \dots, q-2$	$\frac{1}{2}q^3(q-1)$
$\chi_5(k)$	$k = 0, \dots, q^3-2$	q^3-1
χ_6		1
$\chi_7(k)$	$k = 0, \dots, q-2$	$q-1$
χ_8		1

Fortsetzung

Name	Parameterbereich	Anzahl der Charaktere
χ_9		1
χ_{10}		1
$\chi_{11}(k)$	$k = 0, \dots, q^2 + q$ $k \neq 0$	$\frac{1}{2}(q^2 + q)$
χ_{12}		1
χ_{13}		1
$\chi_{14}(k)$	$k = 0, \dots, q^2 - q$ $k \neq 0$	$\frac{1}{2}(q^2 - q)$
χ_{15}		1
χ_{16}		1
χ_{17}		1
χ_{18}		1
χ_{19}		1
χ_{20}		1
$\chi_{21}(k)$	$k = 0, \dots, q^3 - 2$ $k \neq 0, \frac{q^3 - 1}{2}$	$\frac{1}{2}(q^3 - 3)$
$\chi_{22}(k)$	$k = 0, \dots, q^3$ $k \neq 0, \frac{q^3 + 1}{2}$	$\frac{1}{2}(q^3 - 1)$

Tabelle A.45: Parameter für die irreduziblen Charaktere von P

A.46 Charaktertafel von P

Die folgende Tabelle ist die Charaktertafel der maximalen parabolischen Untergruppe P . Zur Bezeichnung der Konjugiertenklassen vergleiche man Tabelle A.25. Zur Wahl der Parameter k, l vergleiche man Tabelle A.45. Die Charaktertafel von P hängt von einem Parameter δ ab, der die Kongruenzklasse von q modulo 4 angibt. Der Parameter δ nimmt die Werte $\delta = 1$ oder $\delta = -1$ an. Man beachte, dass der Charakter χ_8 *kein* irreduzibler Charakter, sondern die Summe von $q + 1$ verschiedenen irreduziblen Charakteren von P vom Grad $q(q - 1)^2(q^2 + q + 1)(q^3 + 1)$ ist.

Tabelle A.46: Charaktertafel von P

	$c_{1,0}$
$\chi_1(k)$	1
$\chi_2(k)$	q^3
$\chi_3(k, l)$	$q^3 + 1$
$\chi_4(k)$	$q^3 - 1$
$\chi_5(k)$	$(q - 1)(q^3 + 1)$
χ_6	$(q - 1)^2(q^2 + q + 1)(q^3 + 1)$
$\chi_7(k)$	$q(q^3 - 1)(q^3 + 1)$
χ_8	$q(q - 1)^2(q + 1)(q^2 + q + 1)(q^3 + 1)$
χ_9	$\frac{1}{2}q^3(q - 1)^2(q^3 + 1)$
χ_{10}	$\frac{1}{2}q^3(q - 1)^2(q^3 - 1)$
$\chi_{11}(k)$	$q^3(q - 1)^2(q^3 + 1)$
χ_{12}	$\frac{1}{2}q^3(q^2 - 1)(q^3 - 1)$
χ_{13}	$\frac{1}{2}q^3(q^2 - 1)(q^3 + 1)$
$\chi_{14}(k)$	$q^3(q^2 - 1)(q^3 - 1)$
χ_{15}	$q^4(q - 1)$
χ_{16}	$q^7(q - 1)$
χ_{17}	$\frac{1}{2}q^4(q - 1)(q^3 + 1)$
χ_{18}	$\frac{1}{2}q^4(q - 1)(q^3 - 1)$
χ_{19}	$\frac{1}{2}q^4(q - 1)(q^3 + 1)$
χ_{20}	$\frac{1}{2}q^4(q - 1)(q^3 - 1)$
$\chi_{21}(k)$	$q^4(q - 1)(q^3 + 1)$
$\chi_{22}(k)$	$q^4(q - 1)(q^3 - 1)$

Fortsetzung

	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$
$\chi_1(k)$	1	1
$\chi_2(k)$	q^3	q^3
$\chi_3(k, l)$	$q^3 + 1$	$q^3 + 1$
$\chi_4(k)$	$q^3 - 1$	$q^3 - 1$
$\chi_5(k)$	$(q - 1)(q^3 + 1)$	$-(q^3 - q + 1)$
χ_6	$(q - 1)^2(q^2 + q + 1)(q^3 + 1)$	$-(q - 1)(q^2 + q + 1)(q^3 - q + 1)$
$\chi_7(k)$	$q(q^3 - 1)(q^3 + 1)$	$q(q - 1)(q^2 + q + 1)$
χ_8	$q(q - 1)^2(q + 1)(q^2 + q + 1)(q^3 + 1)$	$q(q - 1)^2(q + 1)(q^2 + q + 1)$
χ_9	$\frac{1}{2}q^3(q - 1)^2(q^3 + 1)$	$\frac{1}{2}q^3(q^3 - 2q + 1)$
χ_{10}	$\frac{1}{2}q^3(q - 1)^2(q^3 + 1)$	$\frac{1}{2}q^3(q^3 - 2q + 1)$
$\chi_{11}(k)$	$q^3(q - 1)^2(q^3 + 1)$	$q^3(q^3 - 2q + 1)$
χ_{12}	$\frac{1}{2}q^3(q - 1)^2(q + 1)(q^2 + q + 1)$	$-\frac{1}{2}(q^6 - q^3)$
χ_{13}	$\frac{1}{2}q^3(q^2 - 1)(q^3 - 1)$	$-\frac{1}{2}q^3(q^3 - 1)$
$\chi_{14}(k)$	$q^3(q^2 - 1)(q^3 - 1)$	$-q^3(q^3 - 1)$
χ_{15}	$-q^4$	0
χ_{16}	$-q^7$	0
χ_{17}	$-\frac{1}{2}(q^7 + q^4)$	0
χ_{18}	$-\frac{1}{2}(q^7 + q^4)$	0
χ_{19}	$-\frac{1}{2}(q^7 - q^4)$	0
χ_{20}	$-\frac{1}{2}(q^7 - q^4)$	0
$\chi_{21}(k)$	$-q^4(q^3 + 1)$	0
$\chi_{22}(k)$	$-q^4(q - 1)(q^2 + q + 1)$	0

Fortsetzung

	$c_{1,3}$	$c_{1,4}$
$\chi_1(k)$	1	1
$\chi_2(k)$	q^3	0
$\chi_3(k, l)$	$q^3 + 1$	1
$\chi_4(k)$	$q^3 - 1$	-1
$\chi_5(k)$	$q - 1$	$q - 1$
χ_6	$(q - 1)^2(q^2 + q + 1)$	$-(q - 1)$
$\chi_7(k)$	$q(q^3 - q^2 - 1)$	$q(q - 1)(q + 1)$
χ_8	$q(q + 1)(q^4 - 2q^3 + q^2 - q + 1)$	$-q(q - 1)(q + 1)$
χ_9	$-\frac{1}{2}q^3(q - 1)$	0
χ_{10}	$-\frac{1}{2}q^3(q - 1)$	0
$\chi_{11}(k)$	$-q^3(q - 1)$	0
χ_{12}	$-\frac{1}{2}(q^4 - q^3)$	0
χ_{13}	$-\frac{1}{2}q^3(q - 1)$	0
$\chi_{14}(k)$	$-q^3(q - 1)$	0
χ_{15}	0	0
χ_{16}	0	0
χ_{17}	0	$-\frac{1}{2}(q^4 - q^3)$
χ_{18}	0	$\frac{1}{2}(q^4 - q^3)$
χ_{19}	0	$-\frac{1}{2}(q^4 - q^3)$
χ_{20}	0	$\frac{1}{2}(q^4 - q^3)$
$\chi_{21}(k)$	0	0
$\chi_{22}(k)$	0	0

Fortsetzung

	$c_{1,5}$	$c_{1,6}$
$\chi_1(k)$	1	1
$\chi_2(k)$	q^3	0
$\chi_3(k, l)$	$q^3 + 1$	1
$\chi_4(k)$	$q^3 - 1$	-1
$\chi_5(k)$	$q^2 + q - 1$	$q - 1$
χ_6	$(q - 1)(q^2 + q + 1)(q^2 + q - 1)$	$-(q - 1)$
$\chi_7(k)$	$-q(q^2 + q + 1)$	$q(q - 1)(q + 1)$
χ_8	$-q(q - 1)(q + 1)(q^2 + q + 1)$	$-q(q - 1)(q + 1)$
χ_9	q^3	0
χ_{10}	q^3	0
$\chi_{11}(k)$	$2q^3$	0
χ_{12}	0	0
χ_{13}	0	0
$\chi_{14}(k)$	0	0
χ_{15}	0	q^2
χ_{16}	0	0
χ_{17}	0	$\frac{1}{2}(q^3 + q^2)$
χ_{18}	0	$-\frac{1}{2}(q^3 - q^2)$
χ_{19}	0	$\frac{1}{2}(q^3 - q^2)$
χ_{20}	0	$-\frac{1}{2}(q^3 + q^2)$
$\chi_{21}(k)$	0	q^2
$\chi_{22}(k)$	0	$-q^2$

Fortsetzung

	$c_{1,7}$	$c_{1,8}$	$c_{1,9}(a')$	$c_{1,10}$
$\chi_1(k)$	1	1	1	1
$\chi_2(k)$	q^3	0	0	0
$\chi_3(k, l)$	$q^3 + 1$	1	1	1
$\chi_4(k)$	$q^3 - 1$	-1	-1	-1
$\chi_5(k)$	$-(q^2 - q + 1)$	$q - 1$	$q - 1$	-1
χ_6	$-(q - 1)(q^2 + q + 1)(q^2 - q + 1)$	$-(q - 1)$	$-(q - 1)$	1
$\chi_7(k)$	$-q(q^2 - q + 1)$	$q(q - 1)(q + 1)$	$-q$	0
χ_8	$-q(q - 1)(q^3 + 1)$	$-q(q - 1)(q + 1)$	q	0
χ_9	0	0	0	0
χ_{10}	0	0	0	0
$\chi_{11}(k)$	0	0	0	0
χ_{12}	q^3	0	0	0
χ_{13}	q^3	0	0	0
$\chi_{14}(k)$	$2q^3$	0	0	0
χ_{15}	0	$-q^2$	0	0
χ_{16}	0	0	0	0
χ_{17}	0	$\frac{1}{2}(q^3 - q^2)$	0	0
χ_{18}	0	$-\frac{1}{2}(q^3 + q^2)$	0	0
χ_{19}	0	$\frac{1}{2}(q^3 + q^2)$	0	0
χ_{20}	0	$-\frac{1}{2}(q^3 - q^2)$	0	0
$\chi_{21}(k)$	0	$-q^2$	0	0
$\chi_{22}(k)$	0	q^2	0	0

Fortsetzung

	$c_{2,0}$	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$	$c_{2,3}$
$\chi_1(k)$	1	1	1	1
$\chi_2(k)$	q^3	q^3	0	0
$\chi_3(k, l)$	$(q^3 + 1)(-1)^k$	$(q^3 + 1)(-1)^k$	$(-1)^k$	$(-1)^k$
$\chi_4(k)$	$(q^3 - 1)(-1)^k$	$(q^3 - 1)(-1)^k$	$-(-1)^k$	$-(-1)^k$
$\chi_5(k)$	0	0	0	0
χ_6	0	0	0	0
$\chi_7(k)$	0	0	0	0
χ_8	0	0	0	0
χ_9	0	0	0	0
χ_{10}	0	0	0	0
$\chi_{11}(k)$	0	0	0	0
χ_{12}	0	0	0	0
χ_{13}	0	0	0	0
$\chi_{14}(k)$	0	0	0	0
χ_{15}	$q - 1$	-1	$q - 1$	-1
χ_{16}	$q^3(q - 1)$	$-q^3$	0	0
χ_{17}	$\frac{1}{2}q^4\delta - \frac{1}{2}q^3\delta + \frac{1}{2}q\delta - \frac{1}{2}\delta$	$-\frac{1}{2}q^3\delta - \frac{1}{2}\delta$	$\frac{1}{2}q\delta - \frac{1}{2}\delta$	$-\frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}q^2$
χ_{18}	$(\frac{1}{2}(q^4 - q^3 + q - 1))\delta$	$(-\frac{1}{2}(q^3 + 1))\delta$	$(\frac{1}{2}(q - 1))\delta$	$-\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}q^2$
χ_{19}	$(-\frac{1}{2}(q^4 - q^3 - q + 1))\delta$	$(\frac{1}{2}(q^3 - 1))\delta$	$(\frac{1}{2}(q - 1))\delta$	$-\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}q^2$
χ_{20}	$(-\frac{1}{2}(q^4 - q^3 - q + 1))\delta$	$(\frac{1}{2}(q^3 - 1))\delta$	$(\frac{1}{2}(q - 1))\delta$	$-\frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}q^2$
$\chi_{21}(k)$	$(q - 1)(-1)^k(q^3 + 1)$	$-(q^3 + 1)(-1)^k$	$(-1)^k(q - 1)$	$-(-1)^k$
$\chi_{22}(k)$	$(q^3 - 1)(q - 1)(-1)^k$	$-(q^3 - 1)(-1)^k$	$-(-1)^k(q - 1)$	$(-1)^k$

Fortsetzung

	$c_{2,4}$	$c_{3,0}$	$c_{3,1}$
$\chi_1(k)$	1	$(-1)^k$	$(-1)^k$
$\chi_2(k)$	0	$(-1)^k$	$(-1)^k$
$\chi_3(k, l)$	$(-1)^k$	$(-1)^{k+l} + (-1)^l$	$(-1)^{k+l} + (-1)^l$
$\chi_4(k)$	$-(-1)^k$	0	0
$\chi_5(k)$	0	$(-1)^k(q-1)$	$(-1)^k(q-1)$
χ_6	0	0	0
$\chi_7(k)$	0	$(q-1)(q^2+q+1)(-1)^k$	$-(-1)^k$
χ_8	0	0	0
χ_9	0	$\frac{1}{2}(q-1)(q^3-1)$	$-\frac{1}{2}(q-1)$
χ_{10}	0	$-\frac{1}{2}(q-1)(q^3-1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$\chi_{11}(k)$	0	0	0
χ_{12}	0	$\frac{1}{2}(q-1)(q^3-1)$	$-\frac{1}{2}(q-1)$
χ_{13}	0	$-\frac{1}{2}(q-1)(q^3-1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$
$\chi_{14}(k)$	0	0	0
χ_{15}	-1	0	0
χ_{16}	0	0	0
χ_{17}	$-\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}q^2$	0	0
χ_{18}	$-\frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}q^2$	0	0
χ_{19}	$-\frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2}q^2$	0	0
χ_{20}	$-\frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}q^2$	0	0
$\chi_{21}(k)$	$-(-1)^k$	0	0
$\chi_{22}(k)$	$(-1)^k$	0	0

Fortsetzung

	$c_{3,2}$	$c_{3,3}$	$c_{3,4}$
$\chi_1(k)$	$(-1)^k$	$(-1)^k$	$(-1)^k$
$\chi_2(k)$	$(-1)^k$	$(-1)^k$	$(-1)^k$
$\chi_3(k, l)$	$(-1)^{k+l} + (-1)^l$	$(-1)^{k+l} + (-1)^l$	$(-1)^{k+l} + (-1)^l$
$\chi_4(k)$	0	0	0
$\chi_5(k)$	$-(-1)^k$	$-(-1)^k$	$-(-1)^k$
χ_6	0	0	0
$\chi_7(k)$	$(q-1)(q^2+q+1)(-1)^k$	$-(-1)^k$	$-(-1)^k$
χ_8	0	0	0
χ_9	$-\frac{1}{2}(q^3-1)$	$\frac{1}{2}(q^2+1)$	$-\frac{1}{2}(q^2-1)$
χ_{10}	$\frac{1}{2}(q^3-1)$	$-\frac{1}{2}(q^2+1)$	$\frac{1}{2}(q^2-1)$
$\chi_{11}(k)$	0	0	0
χ_{12}	$-\frac{1}{2}(q^3-1)$	$-\frac{1}{2}(q^2-1)$	$\frac{1}{2}(q^2+1)$
χ_{13}	$\frac{1}{2}(q^3-1)$	$\frac{1}{2}(q^2-1)$	$-\frac{1}{2}(q^2+1)$
$\chi_{14}(k)$	0	0	0
χ_{15}	0	0	0
χ_{16}	0	0	0
χ_{17}	0	0	0
χ_{18}	0	0	0
χ_{19}	0	0	0
χ_{20}	0	0	0
$\chi_{21}(k)$	0	0	0
$\chi_{22}(k)$	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{4,0}(i)$	$c_{4,1}(i)$	$c_{5,0}(i)$	$c_{5,1}(i)$
$\chi_1(k)$	ζ_1^{2ik}	ζ_1^{2ik}	ζ_1^{ik}	ζ_1^{ik}
$\chi_2(k)$	$q^3 \zeta_1^{2ik}$	0	ζ_1^{ik}	ζ_1^{ik}
$\chi_3(k, l)$	$(q^3 + 1)\zeta_1^{ik+2il}$	ζ_1^{ik+2il}	$\zeta_1^{ik+il} + \zeta_1^{il}$	$\zeta_1^{ik+il} + \zeta_1^{il}$
$\chi_4(k)$	$(q^3 - 1)\zeta_1^{ik}$	$-\zeta_1^{ik}$	0	0
$\chi_5(k)$	0	0	0	0
χ_6	0	0	0	0
$\chi_7(k)$	0	0	$(q - 1)(q^2 + q + 1)\zeta_1^{ik}$	$-\zeta_1^{ik}$
χ_8	0	0	0	0
χ_9	0	0	0	0
χ_{10}	0	0	0	0
$\chi_{11}(k)$	0	0	0	0
χ_{12}	0	0	0	0
χ_{13}	0	0	0	0
$\chi_{14}(k)$	0	0	0	0
χ_{15}	0	0	0	0
χ_{16}	0	0	0	0
χ_{17}	0	0	0	0
χ_{18}	0	0	0	0
χ_{19}	0	0	0	0
χ_{20}	0	0	0	0
$\chi_{21}(k)$	0	0	0	0
$\chi_{22}(k)$	0	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{6,0}(i)$	$c_{6,1}(i)$	$c_{6,2}(i)$
$\chi_1(k)$	1	1	1
$\chi_2(k)$	1	1	1
$\chi_3(k, l)$	$\varphi_3^{ik} + \varphi_3^{-ik}$	$\varphi_3^{ik} + \varphi_3^{-ik}$	$\varphi_3^{ik} + \varphi_3^{-ik}$
$\chi_4(k)$	0	0	0
$\chi_5(k)$	$(q-1)(\varphi_3^{ik} + \varphi_3^{-ik})$	$q\varphi_3^{ik} - \varphi_3^{ik} - \varphi_3^{-ik}$	$q\varphi_3^{-ik} - \varphi_3^{-ik} - \varphi_3^{ik}$
χ_6	0	0	0
$\chi_7(k)$	0	0	0
χ_8	0	0	0
χ_9	$(q-1)^2$	$-(q-1)$	$-(q-1)$
χ_{10}	$(q-1)^2$	$-(q-1)$	$-(q-1)$
$\chi_{11}(k)$	$(q-1)^2(\varphi_3^{ik} + \varphi_3^{-ik})$	$-(q-1)(\varphi_3^{ik} + \varphi_3^{-ik})$	$-(q-1)(\varphi_3^{ik} + \varphi_3^{-ik})$
χ_{12}	0	0	0
χ_{13}	0	0	0
$\chi_{14}(k)$	0	0	0
χ_{15}	$q^2 - q$	0	0
χ_{16}	$q(q-1)$	0	0
χ_{17}	$q^2 - q$	0	0
χ_{18}	$q^2 - q$	0	0
χ_{19}	0	0	0
χ_{20}	0	0	0
$\chi_{21}(k)$	$q(q-1)(\varphi_3^{ik} + \varphi_3^{-ik})$	0	0
$\chi_{22}(k)$	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{6,3}(i)$	$c_{6,4}(i)$	$c_{7,0}(i)$
$\chi_1(k)$	1	1	ζ_1^{ik}
$\chi_2(k)$	1	1	ζ_1^{ik}
$\chi_3(k, l)$	$\varphi_3^{ik} + \varphi_3^{-ik}$	$\varphi_3^{ik} + \varphi_3^{-ik}$	$\zeta_3^{ik} \zeta_1^{il} + \zeta_3^{(q+1)q^{ik}} \zeta_1^{il}$
$\chi_4(k)$	0	0	0
$\chi_5(k)$	$(q-1)(\varphi_3^{ik} + \varphi_3^{-ik})$	$-\varphi_3^{ik} - \varphi_3^{-ik}$	$(q-1)\zeta_3^{ik}$
χ_6	0	0	0
$\chi_7(k)$	0	0	0
χ_8	0	0	0
χ_9	$(q-1)^2$	1	0
χ_{10}	$(q-1)^2$	1	0
$\chi_{11}(k)$	$(q-1)^2(\varphi_3^{ik} + \varphi_3^{-ik})$	$\varphi_3^{ik} + \varphi_3^{-ik}$	0
χ_{12}	0	0	0
χ_{13}	0	0	0
$\chi_{14}(k)$	0	0	0
χ_{15}	$-q$	0	0
χ_{16}	$-q$	0	0
χ_{17}	$-q$	0	0
χ_{18}	$-q$	0	0
χ_{19}	0	0	0
χ_{20}	0	0	0
$\chi_{21}(k)$	$-q(\varphi_3^{ik} + \varphi_3^{-ik})$	0	0
$\chi_{22}(k)$	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{7,1}(i)$	$c_{8,0}(i)$	$c_{8,1}(i)$
$\chi_1(k)$	ζ_1^{ik}	1	1
$\chi_2(k)$	ζ_1^{ik}	1	1
$\chi_3(k, l)$	$\zeta_3^{ik} \zeta_1^{il} + \zeta_3^{(q+1)qik} \zeta_1^{il}$	$\zeta_3^{ik} + \zeta_3^{-ik}$	$\zeta_3^{ik} + \zeta_3^{-ik}$
$\chi_4(k)$	0	0	0
$\chi_5(k)$	$-\zeta_3^{ik}$	0	0
χ_6	0	0	0
$\chi_7(k)$	0	0	0
χ_8	0	0	0
χ_9	0	0	0
χ_{10}	0	0	0
$\chi_{11}(k)$	0	0	0
χ_{12}	0	0	0
χ_{13}	0	0	0
$\chi_{14}(k)$	0	0	0
χ_{15}	0	$q - 1$	-1
χ_{16}	0	$q - 1$	-1
χ_{17}	0	$q(-1)^i - (-1)^i$	$-(-1)^i$
χ_{18}	0	$q(-1)^i - (-1)^i$	$-(-1)^i$
χ_{19}	0	0	0
χ_{20}	0	0	0
$\chi_{21}(k)$	0	$(q - 1)(\zeta_3^{ik} + \zeta_3^{-ik})$	$-\zeta_3^{ik} - \zeta_3^{-ik}$
$\chi_{22}(k)$	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{9,0}(i, j)$	$c_{10,0}(i)$	$c_{10,1}(i)$
$\chi_1(k)$	ζ_1^{jk}	1	1
$\chi_2(k)$	ζ_1^{jk}	-1	-1
$\chi_3(k, l)$	$\zeta_3^{ik} \zeta_1^{jl} + \zeta_3^{-ik} \zeta_1^{(k+l)j}$	0	0
$\chi_4(k)$	0	$-\varphi_6^{ik} - \varphi_6^{-ik}$	$-\varphi_6^{ik} - \varphi_6^{-ik}$
$\chi_5(k)$	0	0	0
χ_6	0	0	0
$\chi_7(k)$	0	0	0
χ_8	0	0	0
χ_9	0	0	0
χ_{10}	0	0	0
$\chi_{11}(k)$	0	0	0
χ_{12}	0	$q^2 - 1$	$q^2 - 1$
χ_{13}	0	$q^2 - 1$	$q^2 - 1$
$\chi_{14}(k)$	0	$(q^2 - 1)(\varphi_6^{ik} + \varphi_6^{-ik})$	$(q^2 - 1)(\varphi_6^{ik} + \varphi_6^{-ik})$
χ_{15}	0	$-(q^2 - q)$	q
χ_{16}	0	$q(q - 1)$	$-q$
χ_{17}	0	0	0
χ_{18}	0	0	0
χ_{19}	0	$q^2 - q$	$-q$
χ_{20}	0	$q^2 - q$	$-q$
$\chi_{21}(k)$	0	0	0
$\chi_{22}(k)$	0	$(q^2 - q)(\varphi_6^{ik} + \varphi_6^{-ik})$	$-q(\varphi_6^{ik} + \varphi_6^{-ik})$

Fortsetzung

	$c_{10,2}(i)$	$c_{11,0}(i)$	$c_{11,1}(i)$	$c_{12,0}(i)$
$\chi_1(k)$	1	1	1	ζ_1^{ik}
$\chi_2(k)$	-1	-1	-1	$-\zeta_1^{ik}$
$\chi_3(k, l)$	0	0	0	0
$\chi_4(k)$	$-\varphi_6^{ik} - \varphi_6^{-ik}$	$-\xi_3^{-ik} - \xi_3^{ik}$	$-\xi_3^{-ik} - \xi_3^{ik}$	$-\eta_3^{q^3 ik} - \eta_3^{ik}$
$\chi_5(k)$	0	0	0	0
χ_6	0	0	0	0
$\chi_7(k)$	0	0	0	0
χ_8	0	0	0	0
χ_9	0	0	0	0
χ_{10}	0	0	0	0
$\chi_{11}(k)$	0	0	0	0
χ_{12}	-1	0	0	0
χ_{13}	-1	0	0	0
$\chi_{14}(k)$	$-\varphi_6^{ik} - \varphi_6^{-ik}$	0	0	0
χ_{15}	0	$q - 1$	-1	0
χ_{16}	0	$-(q - 1)$	1	0
χ_{17}	0	0	0	0
χ_{18}	0	0	0	0
χ_{19}	0	$-q(-1)^i + (-1)^i$	$(-1)^i$	0
χ_{20}	0	$-q(-1)^i + (-1)^i$	$(-1)^i$	0
$\chi_{21}(k)$	0	0	0	0
$\chi_{22}(k)$	0	$-(q - 1)(\xi_3^{ik} + \xi_3^{-ik})$	$\xi_3^{ik} + \xi_3^{-ik}$	0

$$\begin{aligned}\zeta_1 &:= \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{q-1}\right) \\ \varphi_3 &:= \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{q^2+q+1}\right) \\ \varphi_6 &:= \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{q^2-q+1}\right) \\ \zeta_3 &:= \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{q^3-1}\right) \\ \xi_3 &:= \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{q^3+1}\right) \\ \eta_3 &:= \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{(q-1)(q^3+1)}\right)\end{aligned}$$

Tabelle A.46: Charaktertafel von P

A.47 Tabelle zu den Einschränkungen der irreduziblen Charaktere von P auf U_P

Sind $\psi_0, \dots, \psi_5 \in \text{Irr}(U_P)$ wie in Satz 4.8.1 gewählt und ist $e := (\chi \downarrow_{U_P}, \psi_i) \neq 0$ für ein $\chi \in \text{Irr}(P)$ und ein $i \in \{0, \dots, 5\}$, so gilt nach Satz 4.1.3:

$$\chi \downarrow_{U_P} = e \sum_{j=1}^m \psi_i^{t_j},$$

wobei $\{t_1 = 1, t_2, \dots, t_m\}$ eine Transversale für die Rechtsnebenklassen der Trägheitsgruppe I_i in P sei. Die folgende Tabelle enthält für jeden irreduziblen Charakter χ von P das eindeutig bestimmte $i \in \{0, \dots, 5\}$ mit $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_i) \neq 0$.

	$\chi_1(k)$	$\chi_2(k)$	$\chi_3(k, l)$	$\chi_4(k)$	$\chi_5(k)$	χ_6	$\chi_7(k)$	χ_8	χ_9	χ_{10}	$\chi_{11}(k)$
i	0	0	0	0	1	1	2	2	3	3	3

Fortsetzung

	χ_{12}	χ_{13}	$\chi_{14}(k)$	χ_{15}	χ_{16}	χ_{17}	χ_{18}	χ_{19}	χ_{20}	$\chi_{21}(k)$	$\chi_{22}(k)$
i	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5

Tabelle A.47: Tabelle der $i \in \{0, \dots, 5\}$ mit $(\chi \downarrow_{U_P}, \psi_i) \neq 0$

A.48 Einschränkung der unipotenten Charaktere auf P

In der folgenden Tabelle sind für jeden unipotenten Charakter ψ von G die Koeffizienten $c_\chi = (\psi \downarrow_P, \chi)_P$ in der Zerlegung

$$\psi \downarrow_P = \sum_{\chi \in \text{Irr}(P)} c_\chi \chi$$

aufgeführt. Fehlende Einträge bedeuten Nullen. Ist in der folgenden Tabelle ein irreduzibler Charakter von P nicht aufgeführt (wie z.B. $\chi_5(1)$), so sind die Skalarprodukte dieses Charakters mit den Einschränkungen der unipotenten Charaktere von G auf P alle gleich Null.

Charakter χ von P	Parameter	$(\mathbf{1}_P, \chi)_P$	$([\varepsilon_1]_P, \chi)_P$	$([\rho_1]_P, \chi)_P$
$\chi_1(0)$		1	1	1
$\chi_2(0)$				1
$\chi_5(0)$			1	1
χ_6				
$\chi_7(0)$				1
$\chi_7(k)$	$k = 1, \dots, q - 2$			
χ_8				
χ_9				1
χ_{10}				
$\chi_{11}(k)$	$k = 1, \dots, q^2 + q$			
χ_{12}				
χ_{13}				
$\chi_{14}(k)$	$k = 1, \dots, q^2 - q$			
χ_{15}			1	1
χ_{16}				1
χ_{17}				
χ_{18}				1
χ_{19}				
χ_{20}				
$\chi_{21}(k)$	$k = 0, \dots, q^3 - 2,$ $q^2 + q + 1 \nmid k$			
$\chi_{21}((q^2 + q + 1)k)$	$k = 0, \dots, q - 2,$ $k \neq 0, \frac{1}{2}(q - 1)$			1
$\chi_{22}(k)$	$k = 0, \dots, q^3,$ $q^2 - q + 1 \nmid k$			
$\chi_{22}((q^2 - q + 1)k)$	$k = 0, \dots, q,$ $k \neq 0, \frac{1}{2}(q + 1)$			

Fortsetzung

Charakter χ von P	Parameter	$([\rho_2]_P, \chi)_P$	$({}^3D_4[-1]_P, \chi)_P$	$({}^3D_4[1]_P, \chi)_P$
$\chi_1(0)$		1		
$\chi_2(0)$		1		
$\chi_5(0)$		1		
χ_6				
$\chi_7(0)$		1		
$\chi_7(k)$	$k = 1, \dots, q - 2$			
χ_8				
χ_9				
χ_{10}				1
$\chi_{11}(k)$	$k = 1, \dots, q^2 + q$			
χ_{12}		1		
χ_{13}			1	
$\chi_{14}(k)$	$k = 1, \dots, q^2 - q$			
χ_{15}				1
χ_{16}		1		
χ_{17}				1
χ_{18}				
χ_{19}			1	
χ_{20}		1		
$\chi_{21}(k)$	$k = 0, \dots, q^3 - 2,$ $q^2 + q + 1 \nmid k$			
$\chi_{21}((q^2 + q + 1)k)$	$k = 0, \dots, q - 2,$ $k \neq 0, \frac{1}{2}(q - 1)$			1
$\chi_{22}(k)$	$k = 0, \dots, q^3,$ $q^2 - q + 1 \nmid k$			
$\chi_{22}((q^2 - q + 1)k)$	$k = 0, \dots, q,$ $k \neq 0, \frac{1}{2}(q + 1)$	1	1	

Fortsetzung

Charakter χ von P	Parameter	$([\varepsilon_2]_P, \chi)_P$	$(\mathbf{St}_P, \chi)_P$
$\chi_1(0)$			
$\chi_2(0)$		1	1
$\chi_5(0)$			1
χ_6			1
$\chi_7(0)$		1	2
$\chi_7(k)$	$k = 1, \dots, q - 2$		1
χ_8		$q + 1$	$q(q + 1)$
χ_9			$\frac{1}{2}(q + 1)$
χ_{10}			$\frac{1}{2}(q - 1)$
$\chi_{11}(k)$	$k = 1, \dots, q^2 + q$	1	$q - 1$
χ_{12}			$\frac{1}{2}(q + 1)$
χ_{13}			$\frac{1}{2}(q - 1)$
$\chi_{14}(k)$	$k = 1, \dots, q^2 - q$	1	$q + 1$
χ_{15}			1
χ_{16}			$q + 1$
χ_{17}			$\frac{1}{2}(q + 1)$
χ_{18}			$\frac{1}{2}(q + 1)$
χ_{19}			$\frac{1}{2}(q - 1)$
χ_{20}			$\frac{1}{2}(q - 1)$
$\chi_{21}(k)$	$k = 0, \dots, q^3 - 2,$ $q^2 + q + 1 \nmid k$	1	q
$\chi_{21}((q^2 + q + 1)k)$	$k = 0, \dots, q - 2,$ $k \neq 0, \frac{1}{2}(q - 1)$		$q + 1$
$\chi_{22}(k)$	$k = 0, \dots, q^3,$ $q^2 - q + 1 \nmid k$	1	q
$\chi_{22}((q^2 - q + 1)k)$	$k = 0, \dots, q,$ $k \neq 0, \frac{1}{2}(q + 1)$		$q - 1$

A.49 Charaktere von $C_P(D)$

Die folgende Tabelle enthält die Werte der in Abschnitt 4.12 definierten Charaktere des Zentralisators $C_P(D)$ (zur Definition von D siehe Abschnitt 3.7). Zur Bezeichnung der Konjugiertenklassen vergleiche man Tabelle A.34.

	$c_{1,0}$	$c_{1,1}$	$c_{1,2}$	$c_{1,3}$	$c_{1,4}$	$c_{2,0}$	$c_{2,1}$	$c_{3,0}$	$c_{3,1}$	$c_{4,0}$
$C_P(D)\chi_1$	$q(q-1)$	$-q$	0	0	0	$q-1$	-1	0	0	0
$C_P(D)\chi_2$	$q-1$	$q-1$	$q-1$	-1	-1	0	0	0	0	$q-1$
$\mathbf{1}_{TX_{3\alpha+\beta}} \uparrow^{C_P(D)}$	q^2	0	q	0	0	q	0	1	1	q

Fortsetzung

	$c_{4,1}$	$c_{5,0}(i)$	$c_{5,1}(i)$	$c_{5,2}(i)$	$c_{5,3}(i)$	$c_{5,4}(i)$	$c_{6,0}(i)$	$c_{7,0}(i)$
$C_P(D)\chi_1$	0	$q(q-1)$	$-q$	0	0	0	0	0
$C_P(D)\chi_2$	-1	$q-1$	$q-1$	$q-1$	-1	-1	0	0
$\mathbf{1}_{TX_{3\alpha+\beta}} \uparrow^{C_P(D)}$	0	q^2	0	q	0	0	1	1

Fortsetzung

	$c_{8,0}(i)$	$c_{9,0}(i)$	$c_{9,1}(i)$	$c_{10,0}(i)$	$c_{10,1}(i)$	$c_{11,0}(i)$	$c_{11,1}(i)$	$c_{12,0}(i, j)$
$C_P(D)\chi_1$	0	0	0	0	0	$q-1$	-1	0
$C_P(D)\chi_2$	0	$q-1$	-1	0	0	0	0	0
$\mathbf{1}_{TX_{3\alpha+\beta}} \uparrow^{C_P(D)}$	1	q	0	1	1	q	0	1

Tabelle A.49: Charaktere von $C_P(D)$

A.50 Konjugiertenklassen von $\overline{U}_Q$

In der folgenden Tabelle sind die Konjugiertenklassen der Faktorgruppe $\overline{U}_Q$ des unipotenten Radikals U_Q aufgelistet.

Name	Repräsentant	Anzahl	$ C_{\overline{U}_Q} $
$u_1(d)$	$\overline{x_{2\alpha+\beta}(d)}$ $d \in \mathbb{F}_{q^3}$	q^3	$ \overline{U}_Q = q^9$
$u_2(d_1, d_2)$	$\overline{x_\alpha(d_1)x_{\alpha+\beta}(d_2)}$ $(d_1, d_2) \in \mathbb{F}_{q^3} \times \mathbb{F}_{q^3}$ $(d_1, d_2) \neq (0, 0)$	$q^6 - 1$	q^6

Tabelle A.50: Konjugiertenklassen von $\overline{U}_Q$

A.51 Parametrisierung der irreduziblen Charaktere von $\overline{U}_Q$

In der folgenden Tabelle sind Parameter für die irreduziblen Charaktere von $\overline{U}_Q$ aufgeführt. Unter $\text{Irr}(\mathbb{F}_{q^3})$ verstehen wir die irreduziblen Charaktere der additiven Gruppe von $\mathbb{F}_{q^3}$.

Name	Parameter	Charaktergrad	Anzahl
χ_{ϕ_1, ϕ_2}	(ϕ_1, ϕ_2) $\in \text{Irr}(\mathbb{F}_{q^3}) \times \text{Irr}(\mathbb{F}_{q^3})$	1	q^6
χ_ϕ	$\phi \in \text{Irr}(\mathbb{F}_{q^3}), \phi \neq \mathbf{1}$	q^3	$q^3 - 1$

Tabelle A.51: Parameter für die irreduziblen Charaktere von $\overline{U}_Q$

A.52 Charaktertafel von $\overline{U}_Q$

Die folgende Tabelle ist die Charaktertafel der Faktorgruppe $\overline{U}_Q$ des unipotenten Radikals U_Q . Zur Bezeichnung der Konjugiertenklassen vergleiche man Tabelle A.50. Zur Wahl der Parameter ϕ_1, ϕ_2 und ϕ vergleiche man Tabelle A.51.

	$u_1(d)$	$u_2(d_1, d_2)$
χ_{ϕ_1, ϕ_2}	1	$\phi_1(d_1)\phi_2(d_2)$
χ_ϕ	$q^3\phi(d)$	0

Tabelle A.52: Charaktertafel von $\overline{U}_Q$

A.53 Parametrisierung irreduzibler Charaktere von Q

In der folgenden Tabelle sind die Parameterbereiche für die irreduziblen Charaktere von Q angegeben, die $X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ im Kern enthalten.

Name	Parameterbereich	Anzahl der Charaktere
$\chi_1(k)$	$k = 0, \dots, q^3 - 2$	$q^3 - 1$
$\chi_2(k)$	$k = 0, \dots, q^3 - 2$	$q^3 - 1$
$\chi_3(k, l)$	$k = 0, \dots, q^3 - 2$ $l = 0, \dots, q - 2$ $l \neq 0$	$\frac{1}{2}(q^3 - 1)(q - 2)$
$\chi_4(k)$	$k = 0, \dots, q^4 + q^3 - q - 2$ $k \neq (q + 1)m, m = 0, \dots, q^3 - 2$	$\frac{1}{2}q(q^3 - 1)$
$\chi_5(k)$	$k = 0, \dots, q - 2$	$q - 1$
χ_6		1
χ_7		1
χ_8		1

Fortsetzung

Name	Parameterbereich	Anzahl der Charaktere
χ_9		1
χ_{10}		1
χ_{11}		1
χ_{12}		1
χ_{13}		1
$\chi_{14}(k)$	$k = 0, \dots, q-2$ $k \neq 0, \frac{q-1}{2}$	$\frac{1}{2}(q-3)$
$\chi_{15}(k)$	$k = 0, \dots, q$ $k \neq 0, \frac{q+1}{2}$	$\frac{1}{2}(q-1)$

Tabelle A.53: Parameter für irreduzible Charaktere von Q

A.54 Irreduzible Charaktere von Q

Die folgende Tabelle enthält die irreduziblen Charaktere der maximalen parabolischen Untergruppe Q , die $X_{3\alpha+\beta}X_{3\alpha+2\beta}$ im Kern enthalten. Zur Bezeichnung der Konjugiertenklassen vergleiche man Tabelle A.31. Zur Wahl der Parameter k, l vergleiche man Tabelle A.53. Die Charaktertafel von Q hängt von einem Parameter δ ab, der die Kongruenzklasse von q modulo 4 angibt. Der Parameter δ nimmt die Werte $\delta = 1$ oder $\delta = -1$ an.

Tabelle A.54: Irreduzible Charaktere von Q

	$c_{1,0}$	$c_{1,1}$
$\chi_1(k)$	1	1
$\chi_2(k)$	q	q
$\chi_3(k, l)$	$q + 1$	$q + 1$
$\chi_4(k)$	$q - 1$	$q - 1$
$\chi_5(k)$	$(q + 1)(q^3 - 1)$	$(q - 1)(q + 1)(q^2 + q + 1)$
χ_6	$(q - 1)^2(q + 1)(q^2 + q + 1)$	$(q - 1)^2(q + 1)(q^2 + q + 1)$
χ_7	$q(q^2 - 1)(q^3 - 1)$	$q(q^2 - 1)(q^3 - 1)$
χ_8	$q^6 - q^3$	$q^6 - q^3$
χ_9	$q^4(q^3 - 1)$	$q^4(q^3 - 1)$
χ_{10}	$\frac{1}{2}q^3(q + 1)(q^3 - 1)$	$\frac{1}{2}q^3(q + 1)(q^3 - 1)$
χ_{11}	$\frac{1}{2}q^3(q + 1)(q^3 - 1)$	$\frac{1}{2}q^3(q + 1)(q^3 - 1)$
χ_{12}	$\frac{1}{2}q^3(q - 1)(q^3 - 1)$	$\frac{1}{2}q^3(q - 1)(q^3 - 1)$
χ_{13}	$\frac{1}{2}q^3(q - 1)(q^3 - 1)$	$\frac{1}{2}q^3(q - 1)(q^3 - 1)$
$\chi_{14}(k)$	$q^3(q + 1)(q^3 - 1)$	$q^3(q - 1)(q + 1)(q^2 + q + 1)$
$\chi_{15}(k)$	$q^3(q - 1)^2(q^2 + q + 1)$	$q^3(q - 1)^2(q^2 + q + 1)$

Fortsetzung

	$c_{1,2}$	$c_{1,3}$	$c_{1,4}$
$\chi_1(k)$	1	1	1
$\chi_2(k)$	0	q	q
$\chi_3(k, l)$	1	$q + 1$	$q + 1$
$\chi_4(k)$	-1	$q - 1$	$q - 1$
$\chi_5(k)$	$q^3 - 1$	$(q + 1)(q^3 - 1)$	$q^3 - q - 1$
χ_6	$-(q - 1)(q^2 + q + 1)$	$(q - 1)^2(q + 1)(q^2 + q + 1)$	$(q - 1)(q^3 - q - 1)$
χ_7	0	$q(q^2 - 1)(q^3 - 1)$	$-q(q^2 - 1)$
χ_8	0	$-q^3$	0
χ_9	0	$-q^4$	0
χ_{10}	$\frac{1}{2}q^2(q^3 - 1)$	$-\frac{1}{2}q^3(q + 1)$	0
χ_{11}	$-\frac{1}{2}q^2(q^3 - 1)$	$-\frac{1}{2}q^3(q + 1)$	0
χ_{12}	$\frac{1}{2}q^2(q^3 - 1)$	$-\frac{1}{2}q^3(q - 1)$	0
χ_{13}	$-\frac{1}{2}q^2(q^3 - 1)$	$-\frac{1}{2}q^3(q - 1)$	0
$\chi_{14}(k)$	0	$-q^3(q + 1)$	0
$\chi_{15}(k)$	0	$-q^3(q - 1)$	0

Fortsetzung

	$c_{1,5}$	$c_{1,6}$	$c_{1,7}$
$\chi_1(k)$	1	1	1
$\chi_2(k)$	0	0	0
$\chi_3(k, l)$	1	1	1
$\chi_4(k)$	-1	-1	-1
$\chi_5(k)$	$q^3 - 1$	$q^3 - 1$	$q^3 - 1$
χ_6	$-(q - 1)(q^2 + q + 1)$	$-(q - 1)(q^2 + q + 1)$	$-(q - 1)(q^2 + q + 1)$
χ_7	0	0	0
χ_8	q^3	0	$q^3\delta$
χ_9	0	0	0
χ_{10}	$\frac{1}{2}(q^3 - q^2)$	$\frac{1}{2}q^2(q^3 - 1)$	$-\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}q^3\delta$
χ_{11}	$\frac{1}{2}(q^3 + q^2)$	$-\frac{1}{2}q^2(q^3 - 1)$	$\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}q^3\delta$
χ_{12}	$-\frac{1}{2}(q^3 + q^2)$	$\frac{1}{2}q^2(q^3 - 1)$	$-\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}q^3\delta$
χ_{13}	$-\frac{1}{2}(q^3 - q^2)$	$-\frac{1}{2}q^2(q^3 - 1)$	$\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}q^3\delta$
$\chi_{14}(k)$	q^3	0	$q^3\delta$
$\chi_{15}(k)$	$-q^3$	0	$-q^3\delta$

Fortsetzung

	$c_{1,8}$	$c_{1,9}(i, b)$	$c_{1,10}$
$\chi_1(k)$	1	1	1
$\chi_2(k)$	q	0	0
$\chi_3(k, l)$	$q + 1$	1	1
$\chi_4(k)$	$q - 1$	-1	-1
$\chi_5(k)$	$q^3 - q - 1$	$q^3 - 1$	$q^3 - 1$
χ_6	$(q - 1)(q^3 - q - 1)$	$-(q - 1)(q^2 + q + 1)$	$-(q - 1)(q^2 + q + 1)$
χ_7	$-q(q^2 - 1)$	0	0
χ_8	0	$(-1)^i q^3$	$-q^3 \delta$
χ_9	0	0	0
χ_{10}	0	$-\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}(-1)^i q^3$	$-\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}q^3 \delta$
χ_{11}	0	$\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}(-1)^i q^3$	$\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}q^3 \delta$
χ_{12}	0	$-\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}(-1)^i q^3$	$-\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}q^3 \delta$
χ_{13}	0	$\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}(-1)^i q^3$	$\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}q^3 \delta$
$\chi_{14}(k)$	0	$(-1)^i q^3$	$-q^3 \delta$
$\chi_{15}(k)$	0	$-(-1)^i q^3$	$q^3 \delta$

Fortsetzung

	$c_{1,11}$	$c_{1,12}(i, b)$	$c_{1,13}$	$c_{1,14}$
$\chi_1(k)$	1	1	1	1
$\chi_2(k)$	q	0	q	0
$\chi_3(k, l)$	$q + 1$	1	$q + 1$	1
$\chi_4(k)$	$q - 1$	-1	$q - 1$	-1
$\chi_5(k)$	$q^3 - q - 1$	$q^3 - 1$	$-(q + 1)$	-1
χ_6	$(q - 1)(q^3 - q - 1)$	$-(q - 1)(q^2 + q + 1)$	$-(q - 1)(q + 1)$	1
χ_7	$-q(q^2 - 1)$	0	q	0
χ_8	0	$(-1)^i q^3$	0	0
χ_9	0	0	0	0
χ_{10}	0	$-\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}(-1)^i q^3$	0	0
χ_{11}	0	$\frac{1}{2}q^2 + \frac{1}{2}(-1)^i q^3$	0	0
χ_{12}	0	$-\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}(-1)^i q^3$	0	0
χ_{13}	0	$\frac{1}{2}q^2 - \frac{1}{2}(-1)^i q^3$	0	0
$\chi_{14}(k)$	0	$(-1)^i q^3$	0	0
$\chi_{15}(k)$	0	$-(-1)^i q^3$	0	0

Fortsetzung

	$c_{2,0}$	$c_{2,1}$	$c_{2,2}$
$\chi_1(k)$	$(-1)^k$	$(-1)^k$	$(-1)^k$
$\chi_2(k)$	$(-1)^k$	$(-1)^k$	$(-1)^k$
$\chi_3(k, l)$	$(-1)^{l+k} + (-1)^k$	$(-1)^{l+k} + (-1)^k$	$(-1)^{l+k} + (-1)^k$
$\chi_4(k)$	0	0	0
$\chi_5(k)$	$(q-1)(q^2+q+1)(-1)^k$	$(q-1)(q^2+q+1)(-1)^k$	$-(-1)^k$
χ_6	0	0	0
χ_7	0	0	0
χ_8	0	0	0
χ_9	0	0	0
χ_{10}	0	0	0
χ_{11}	0	0	0
χ_{12}	0	0	0
χ_{13}	0	0	0
$\chi_{14}(k)$	0	0	0
$\chi_{15}(k)$	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{2,3}$	$c_{2,4}$	$c_{3,0}$
$\chi_1(k)$	$(-1)^k$	$(-1)^k$	1
$\chi_2(k)$	$(-1)^k$	$(-1)^k$	q
$\chi_3(k, l)$	$(-1)^{l+k} + (-1)^k$	$(-1)^{l+k} + (-1)^k$	$(q+1)(-1)^l$
$\chi_4(k)$	0	0	$(q-1)(-1)^k$
$\chi_5(k)$	$-(-1)^k$	$-(-1)^k$	0
χ_6	0	0	0
χ_7	0	0	0
χ_8	0	0	$(q^3-1)\delta$
χ_9	0	0	$(q^3-1)q\delta$
χ_{10}	0	0	$\frac{1}{2}(q+1)(q^3-1)$
χ_{11}	0	0	$\frac{1}{2}(q+1)(q^3-1)$
χ_{12}	0	0	$-\frac{1}{2}(q-1)(q^3-1)$
χ_{13}	0	0	$-\frac{1}{2}(q-1)(q^3-1)$
$\chi_{14}(k)$	0	0	$(q^3-1)(-1)^k(q+1)$
$\chi_{15}(k)$	0	0	$\delta(q^2+q+1)(q-1)^2(-1)^k$

Fortsetzung

	$c_{3,1}$	$c_{3,2}$	$c_{3,3}$	$c_{3,4}$
$\chi_1(k)$	1	1	1	1
$\chi_2(k)$	0	q	0	0
$\chi_3(k, l)$	$(-1)^l$	$(q+1)(-1)^l$	$(-1)^l$	$(-1)^l$
$\chi_4(k)$	$-(-1)^k$	$(q-1)(-1)^k$	$-(-1)^k$	$-(-1)^k$
$\chi_5(k)$	0	0	0	0
χ_6	0	0	0	0
χ_7	0	0	0	0
χ_8	$(q^3 - 1)\delta$	$-\delta$	$-\delta$	$-\delta$
χ_9	0	$-q\delta$	0	0
χ_{10}	$\frac{1}{2}(q^3 - 1)$	$-\frac{1}{2}(q+1)$	$\frac{1}{2}(q^2 - 1)$	$-\frac{1}{2}(q^2 + 1)$
χ_{11}	$\frac{1}{2}(q^3 - 1)$	$-\frac{1}{2}(q+1)$	$-\frac{1}{2}(q^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(q^2 - 1)$
χ_{12}	$\frac{1}{2}(q^3 - 1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$-\frac{1}{2}(q^2 + 1)$	$\frac{1}{2}(q^2 - 1)$
χ_{13}	$\frac{1}{2}(q^3 - 1)$	$\frac{1}{2}(q-1)$	$\frac{1}{2}(q^2 - 1)$	$-\frac{1}{2}(q^2 + 1)$
$\chi_{14}(k)$	$(q^3 - 1)(-1)^k$	$-(-1)^k(q+1)$	$-(-1)^k$	$-(-1)^k$
$\chi_{15}(k)$	$-\delta(q-1)(q^2 + q + 1)(-1)^k$	$-(q-1)\delta(-1)^k$	$\delta(-1)^k$	$\delta(-1)^k$

Fortsetzung

	$c_{4,0}(i)$	$c_{4,1}(i)$	$c_{5,0}(i)$
$\chi_1(k)$	ζ_1^{ik}	ζ_1^{ik}	1
$\chi_2(k)$	ζ_1^{ik}	ζ_1^{ik}	1
$\chi_3(k, l)$	$\zeta_1^{il+ik} + \zeta_1^{2il+ik}$	$\zeta_1^{il+ik} + \zeta_1^{2il+ik}$	$\zeta_1^{il} + \zeta_1^{-il}$
$\chi_4(k)$	0	0	0
$\chi_5(k)$	$(q-1)(q^2 + q + 1)\zeta_1^{ik}$	$-\zeta_1^{ik}$	0
χ_6	0	0	0
χ_7	0	0	0
χ_8	0	0	$(-1)^i q^3 - (-1)^i$
χ_9	0	0	$(q^3 - 1)(-1)^i$
χ_{10}	0	0	$q^3 - 1$
χ_{11}	0	0	$q^3 - 1$
χ_{12}	0	0	0
χ_{13}	0	0	0
$\chi_{14}(k)$	0	0	$(q^3 - 1)(\zeta_1^{ik} + \zeta_1^{-ik})$
$\chi_{15}(k)$	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{5,1}(i)$	$c_{6,0}(i)$	$c_{6,1}(i)$	$c_{6,2}(i)$	$c_{6,3}(i)$
$\chi_1(k)$	1	φ_3^{ik}	φ_3^{ik}	φ_3^{ik}	φ_3^{ik}
$\chi_2(k)$	1	$q\varphi_3^{ik}$	0	$q\varphi_3^{ik}$	0
$\chi_3(k, l)$	$\zeta_1^{il} + \zeta_1^{-il}$	$(q+1)\varphi_3^{ik}$	φ_3^{ik}	$(q+1)\varphi_3^{ik}$	φ_3^{ik}
$\chi_4(k)$	0	$(q-1)\varphi_3^{-ik}$	$-\varphi_3^{-ik}$	$(q-1)\varphi_3^{-ik}$	$-\varphi_3^{-ik}$
$\chi_5(k)$	0	0	0	0	0
χ_6	0	0	0	0	0
χ_7	0	0	0	0	0
χ_8	$-(-1)^i$	0	0	0	0
χ_9	$-(-1)^i$	0	0	0	0
χ_{10}	-1	0	0	0	0
χ_{11}	-1	0	0	0	0
χ_{12}	0	0	0	0	0
χ_{13}	0	0	0	0	0
$\chi_{14}(k)$	$-\zeta_1^{ik} - \zeta_1^{-ik}$	0	0	0	0
$\chi_{15}(k)$	0	0	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{7,0}(i)$	$c_{7,1}(i)$	$c_{8,0}(i)$	$c_{8,1}(i)$
$\chi_1(k)$	ζ_3^{2ik}	ζ_3^{2ik}	ζ_3^{ik}	ζ_3^{ik}
$\chi_2(k)$	$q\zeta_3^{2ik}$	0	ζ_3^{ik}	ζ_3^{ik}
$\chi_3(k, l)$	$(q+1)\zeta_3^{2ik}\zeta_1^{il}$	$\zeta_3^{2ik}\zeta_1^{il}$	$\zeta_3^{ik} + \zeta_3^{ik}\zeta_1^{il}$	$\zeta_3^{ik} + \zeta_3^{ik}\zeta_1^{il}$
$\chi_4(k)$	$(q-1)\zeta_3^{(q^2+q-1)ik}$	$-\zeta_3^{(q^2+q-1)ik}$	0	0
$\chi_5(k)$	0	0	0	0
χ_6	0	0	0	0
χ_7	0	0	0	0
χ_8	0	0	0	0
χ_9	0	0	0	0
χ_{10}	0	0	0	0
χ_{11}	0	0	0	0
χ_{12}	0	0	0	0
χ_{13}	0	0	0	0
$\chi_{14}(k)$	0	0	0	0
$\chi_{15}(k)$	0	0	0	0

Fortsetzung

	$c_{9,0}(i, j)$	$c_{10,0}(i)$	$c_{10,1}(i)$
$\chi_1(k)$	ζ_3^{ik}	1	1
$\chi_2(k)$	ζ_3^{ik}	-1	-1
$\chi_3(k, l)$	$\zeta_3^{ik} \zeta_1^{(i-j)l} + \zeta_3^{ik} \zeta_1^{jl}$	0	0
$\chi_4(k)$	0	$-\xi_1^{ik} - \xi_1^{-ik}$	$-\xi_1^{ik} - \xi_1^{-ik}$
$\chi_5(k)$	0	0	0
χ_6	0	0	0
χ_7	0	0	0
χ_8	0	$-(q^3 - 1)(-1)^i$	$(-1)^i$
χ_9	0	$(q^3 - 1)(-1)^i$	$-(-1)^i$
χ_{10}	0	0	0
χ_{11}	0	0	0
χ_{12}	0	$q^3 - 1$	-1
χ_{13}	0	$q^3 - 1$	-1
$\chi_{14}(k)$	0	0	0
$\chi_{15}(k)$	0	$(q^3 - 1)(-1)^i(\xi_1^{ik} + \xi_1^{-ik})$	$-(-1)^i(\xi_1^{ik} + \xi_1^{-ik})$

Fortsetzung

	$c_{11,0}(i)$
$\chi_1(k)$	$\zeta_3^{q^2 ik - qik + ik}$
$\chi_2(k)$	$-\zeta_3^{q^2 ik - qik + ik}$
$\chi_3(k, l)$	0
$\chi_4(k)$	$-\mu_3^{(q^2 + q - 1)ik} - \mu_3^{-q(q^2 - q - 1)ik}$
$\chi_5(k)$	0
χ_6	0
χ_7	0
χ_8	0
χ_9	0
χ_{10}	0
χ_{11}	0
χ_{12}	0
χ_{13}	0
$\chi_{14}(k)$	0
$\chi_{15}(k)$	0

Tabelle A.54: Irreduzible Charaktere von Q

A.55 Einschränkung der unipotenten Charaktere auf Q

In der folgenden Tabelle sind für jeden unipotenten Charakter ψ von G die Skalarprodukte $(\psi \downarrow_Q, \chi)_Q$ aufgelistet, wobei χ die in Tabelle A.54 angegebenen irreduziblen Charaktere von Q durchläuft. Fehlende Einträge bedeuten Nullen. Ist in der folgenden Tabelle ein irreduzibler Charakter von Q aus Tabelle A.54 nicht aufgeführt (wie z.B. $\chi_5(1)$), so sind die Skalarprodukte dieses Charakters mit den Einschränkungen der unipotenten Charaktere von G auf Q alle gleich Null. Man beachte jedoch, dass Tabelle A.54 nicht die vollständige Charaktertafel von Q ist. Die Einschränkungen der unipotenten Charaktere von G auf Q besitzen also im Allgemeinen noch irreduzible Konstituenten, die in den Tabellen A.54 und A.55 nicht aufgeführt sind.

Tabelle A.55: Skalarprodukte der Einschränkungen der unipotenten Charaktere

Charakter χ von Q	Parameter	$(\mathbf{1}_Q, \chi)_Q$	$([\varepsilon_1]_Q, \chi)_Q$	$([\rho_1]_Q, \chi)_Q$
$\chi_1(0)$		1		1
$\chi_2(0)$			1	1
$\chi_5(0)$				1
χ_6				
χ_7				
χ_8				
χ_9				
χ_{10}				1
χ_{11}				
χ_{12}				
χ_{13}				
$\chi_{14}(k)$	$k = 1, \dots, q-2,$ $k \neq \frac{q-1}{2}$			
$\chi_{15}(k)$	$k = 1, \dots, q,$ $k \neq \frac{q+1}{2}$			

Fortsetzung

Char. χ von Q	Parameter	$([\rho_2]_Q, \chi)_Q$	$({}^3D_4[-1]_Q, \chi)_Q$	$({}^3D_4[1]_Q, \chi)_Q$
$\chi_1(0)$		1		
$\chi_2(0)$		1		
$\chi_5(0)$		1		
χ_6				
χ_7				
χ_8				
χ_9				
χ_{10}				
χ_{11}		1		
χ_{12}				1
χ_{13}			1	
$\chi_{14}(k)$	$k = 1, \dots, q-2, k \neq \frac{q-1}{2}$			
$\chi_{15}(k)$	$k = 1, \dots, q, k \neq \frac{q+1}{2}$			

Fortsetzung

Charakter χ von Q	Parameter	$([\varepsilon_2]_Q, \chi)_Q$	$(\mathbf{St}_Q, \chi)_Q$
$\chi_1(0)$		1	
$\chi_2(0)$			1
$\chi_5(0)$		1	1
χ_6			1
χ_7		1	q
χ_8		1	q
χ_9		q	$q^2 + 1$
χ_{10}		$q + 1$	$\frac{q^2+q}{2} + 1$
χ_{11}		1	$\frac{q^2+q}{2} + 1$
χ_{12}		q	$\frac{q^2-q}{2}$
χ_{13}			$\frac{q^2-q}{2}$
$\chi_{14}(k)$	$k = 1, \dots, q-2, k \neq \frac{q-1}{2}$	$q + 1$	$q^2 + q + 1$
$\chi_{15}(k)$	$k = 1, \dots, q, k \neq \frac{q+1}{2}$	$q - 1$	$q^2 - q + 1$

Bibliographie

- [1] J. L. ALPERIN, Local Representation Theory, Cambridge University Press, 1993. [144](#), [150](#)
- [2] W. W. BOSMA UND J. J. CANNON, Handbook of Magma Functions, School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, Sydney, 1997. [27](#), [37](#)
- [3] N. BOURBAKI, Groupes et algèbres de Lie, Hermann, 1971-1975. [17](#)
- [4] D. W. BURRY, A strengthened theory of vertices and sources, *J. Algebra* **59** (1979), 330–344. [145](#)
- [5] ———, Components of induced modules, *J. Algebra* **87** (1984), 483–492. [145](#)
- [6] R. W. CARTER, Simple Groups of Lie Type, ‚A Wiley-Interscience publication‘, London, 1972. [19](#), [20](#), [21](#), [22](#), [28](#), [30](#), [33](#), [43](#), [45](#)
- [7] ———, Finite Groups of Lie Type - Conjugacy Classes and Complex Characters, ‚A Wiley-Interscience publication‘, Chichester, 1985. [10](#), [14](#), [17](#), [30](#), [32](#), [33](#), [44](#), [54](#), [70](#), [84](#), [93](#), [97](#), [146](#), [165](#)
- [8] B. CHAR, K. GEDDES, G. GONNET, B. LEONG, M. MONAGAN UND S. WATT, Maple V, Language Reference Manual, Springer, 1991. [10](#), [88](#)
- [9] C. CHEVALLEY, Sur certain groupes simples, *Tôhoku Math. J.* **7** (1955), 14–66. [19](#)
- [10] ———, Classification des groupes de Lie algébriques, Vol. I, Séminaire Chevalley, Paris, 1956-58. [42](#)
- [11] A. M. COHEN, S. MURRAY UND D. E. TAYLOR, Computing in Groups of Lie Type. Preprint. [37](#)
- [12] C. CURTIS UND I. REINER, Methods of Representation Theory, I und II, Wiley, New York, 1987. [142](#), [162](#)

- [13] P. DELIGNE UND G. LUSZTIG, Representations of reductive groups over finite fields, *Ann. Math.* **103** (1976), 103–161. 6
- [14] D. I. DERIZIOTIS UND G. O. MICHLER, Character tables and blocks of finite simple triality groups ${}^3D_4(q)$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **303** (1987), 39–70. 52, 53, 56, 57, 88, 92
- [15] F. DIGNE UND J. MICHEL, Representations of Finite Groups of Lie Type, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. 10, 52, 54, 56, 70
- [16] W. FEIT, The Representation Theory of Finite Groups, North-Holland Publishing Company, New York, 1982. 137, 141, 146
- [17] P. FONG, On the characters of p -solvable groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **98** (1961), 263–284. 139, 140
- [18] THE GAP GROUP, GAP – Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.3, 2002. (<http://www.gap-system.org>). 27
- [19] M. GECK, Verallgemeinerte Gelfand-Graev Charaktere und Zerlegungszahlen endlicher Gruppen von Lie-Typ, Dissertation, RWTH Aachen, 1990. 7, 13, 39, 40, 41, 42, 45, 46, 52, 53, 54, 55, 56, 59, 60, 61, 62, 75, 92, 105, 107, 135, 155, 156, 157, 158, 175, 176, 185
- [20] M. GECK UND G. HISS, Modular representations of finite groups of Lie type in non-defining characteristic, in *Finite reductive groups: Related structures and representations*, M. Cabanes (Hrsg.), Birkhäuser, Basel, 1997, 195–249. 146
- [21] M. GECK, G. HISS, F. LÜBECK, G. MALLE UND G. PFEIFFER, CHEVIE – A system for computing and processing generic character tables for finite groups of Lie type, Weyl groups and Hecke algebras, *Appl. Algebra Engrg. Comm. Comput.* **7** (1996), 175–210. 10, 27, 37, 88
- [22] D. M. GOLDSCHMIDT, Lectures on Character Theory, Publish or Perish, Berkely, 1980. 141
- [23] S. HALLER, Unipot—a system for computing with elements of unipotent subgroups of Chevalley groups, Version 1.1. Technical report, Justus-Liebig-Universität, Germany, July 2000. 27
- [24] G. HISS, Zerlegungszahlen endlicher Gruppen vom Lie-Typ in nicht-definierender Charakteristik, Habilitationsschrift, RWTH Aachen, 1989. 10
- [25] G. HISS UND K. LUX, Brauer Trees of Sporadic Groups, Oxford University Press, 1989. 138, 139, 141, 152

- [26] J. E. HUMPHREYS, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer, New York, 1972. [24](#)
- [27] —, Reflection Groups and Coxeter Groups, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. [33](#)
- [28] —, Linear Algebraic Groups, Springer, New York, 1991. [14](#), [19](#), [45](#), [64](#), [66](#)
- [29] B. HUPPERT, Endliche Gruppen I, Grundlagen der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 1967. [90](#)
- [30] I. M. ISAACS, Character Theory of Finite Groups, Dover, New York, 1976. [90](#), [91](#), [132](#)
- [31] U. JÜRGENS, Frobeniusmatrizen maximaler parabolischer Untergruppen in $GL_n(q)$, Dissertation, Universität Bielefeld, 1996. [92](#)
- [32] P. LANDROCK, Finite Group Algebras and Their Modules, Cambridge University Press, 1983. [143](#)
- [33] S. LANG, Algebra, Addison-Wesley, 3. Auflage, 1993. [115](#)
- [34] F. LÜBECK, Charaktertafeln für die Gruppen $CSp_6(q)$ mit ungeradem q und $Sp_6(q)$ mit geradem q , Dissertation, Universität Heidelberg, 1993. [17](#), [53](#), [58](#), [94](#)
- [35] T. OKUYAMA UND K. WAKI, Decomposition numbers of $Sp(4, q)$, *J. Algebra* **199** (1998), 544–555. [8](#), [161](#)
- [36] M. SCHÖNERT ET AL., GAP– Groups, Algorithms, and Programming, Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule Aachen, Germany, fünfte Auflage, 1995. [10](#), [27](#), [37](#)
- [37] I. SCHUR, Untersuchungen über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, *J. reine angew. Math.* **132** (1907), 85–137. [132](#)
- [38] C. SIMS, Computation with finitely presented groups, Cambridge University Press, 1994. [25](#)
- [39] N. SPALTENSTEIN, Caractères unipotents de ${}^3D_4(q)$, *Comment. Math. Helvetici* **57** (1982), 676–691. [52](#), [55](#), [88](#), [92](#)
- [40] T. A. SPRINGER, Linear Algebraic Groups, Birkhäuser, Boston, 2nd Edition, 1991. [14](#), [18](#), [22](#), [23](#), [24](#), [27](#), [29](#), [30](#), [44](#)
- [41] R. STEINBERG, Lectures on Chevalley Groups, Yale University, 1968. [42](#)